Lei 24900

Acest manual de ANALIZĂ MATEMATICĂ corespunde noilor programe de învățământ și ține cont de tradiția instalată la noi în predarea matema[illegible] [illegible] în cele două lumi adiacente [illegible]ematicii - calculatorul și aplicațiile ing[illegible]nerești.

Autorii sunt [illegible] Universității [illegible] facultățile [illegible] Autom[illegible] și Electronică [illegible] experiența a [illegible] specialiști în [illegible]

ISBN 973-95933-2-1

Paul Flondor Octavian Stănășilă

LECȚII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ





și exerciții rezolvate

LECŢII DE MATEMATICĂ ŞI EXERCIŢII REZOLVATE
Paul Flondor, Octavian Stănăşilă

ISBN 973-95933-2-1

Editura **ALL** — Bucureşti, Carol Knappe 20, ☎ 312.79.90, 223.43.35 Fax: 312.77.95

Departamentul Distribuţie — Str. Hagi Ghiţă, nr. 57, Sect. 1, 78208 - Bucureşti, ☎ 665.37.45, 666.38.00, 223.32.44



Coperta: Stelian Stanciu
Tehnoredactare computerizată: Mircea Moldovan, Mariana Ghineraru

PRINTED IN ROMÂNIA

PAUL FLONDOR OCTAVIAN STĂNĂŞILĂ

LECŢII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ŞI EXERCIŢII REZOLVATE

EDIŢIA A II-A

ALL

Colecţia *Matematică – Fizică – Automatică*
a editurii **ALL** cuprinde:

1. **Analiză matematică** – culegere de probleme vol. I şi II
N. Donciu, D. Flondor,
2. **Probleme recapitulative de fizică**
Mihail Penescu,
3. **Stabilizarea sistemelor liniare**
V. Drăgan, A. Halanay,
4. **Algebră liniară. Geometrie analitică, diferenţială. Ecuaţii diferenţiale**
Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache
5. **Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicaţii**
V. Brînzănescu, O. Stănăşilă,
6. **Teoria sistemelor. Sinteza robustă. Metode numerice de calcul**
Vlad Ionescu, A. Varga,
7. **Fizică** – vol. I şi II
Cornelia Moţoc,
8. **Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferenţială**
C. Radu,
9. **Simularea Monte Carlo a transportului radiaţiilor**
O. Sima,
10. **Fizică nucleară. Culegere de probleme**
Editori: Reveica Ion–Mihai, O. G. Duliu, M. Penescu,

SL

CUVÎNT ÎNAINTE

Analiza matematică este o "simfonie a infinitului", aşa cum spunea marele matematician DAVID HILBERT; *ea înseamnă* ***analiza*** *procesului de trecere la limită, folosit în definirea şi studiul derivatelor, integralelor şi multor altor concepte fundamentale, care permit descrierea matematică a mişcării, creşterii, măsurii, înseamnă o victorie a spiritului saupra materiei.*

Ca disciplină de învăţămînt şi ca obiect inepuizabil de cercetare, Analiza matematică este un sumum de rezultate de mare profunzime, obţinute prin căutările ştiinţifice ale multor generaţii, începînd cu geniul lui Arhimede, căruia i se datorează multe raţionamente specifice analizei într-o formă primitivă (în lipsa definirii noţiunilor de număr real şi funcţie reală). Un moment decisiv este cel marcat de G. W. LEIBNIZ, *filosof şi analist riguros şi I.* NEWTON, *interesat în probleme de fizică, două temperamente ştiinţifice distincte şi deopotrivă de necesare, reprezentînd forţa supremă a raţionamentului şi intuiţiei. Din acel moment, Fizica a devenit ştiinţă. Istoria şi logica Analizei matematice sunt legate de numele altor mari spirite, precum* EULER, GAUSS, CAUCHY, RIEMANN, POINCARÉ, LEBESGUE, HILBERT, GROTHENDIECK, GRAUERT.

Înţelegerea Analizei matematice, la unul din nivelele posibile de raţiune suficientă, este şi un ***fapt de cultură şi educaţie****, pentru că disciplinează gîndirea, cenzurează intuiţia prin raţionament, stimulează descoperirea şi contribuie la modelarea multor fenomene fizice, chimice, biologice şi tehnico–economice. În ultimele decenii, Analiza matematică este pe de o parte continuată în domenii noi, de sine stătătoare, ca Analiza funcţională, Geometria diferenţială, Fizica matematică şi pe de altă parte, este dizolvată în metode numerice prin "traducerea" teoremelor în programe de calcul.*

În ţara noastră, învăţămîntul şi cercetarea ştiinţifică în domeniul Analizei s-au realizat la un nivel înalt, graţie unei pleiade de profesori care au depus şi un efort propriu de cercetare şi amintim numele lui D. EMMANUEL, *D.* POMPEIU, *S.* STOILOW, *M.* NICOLESCU.

Această carte cuprinde patrusprezece lecţii asupra subiectelor standard ale cursului adresat studenţilor din anul I al facultăţilor tehnice şi economice. Pe baza experienţei autorilor la facultăţile de Automatică–calculatoare şi Electronică, am căutat să netezim dificultăţile trecerii de la liceu la facultate, utilizînd un limbaj nuanţat. Spaţiul tipografic mai restrîns, dar şi unele licenţe didactice, ne-au oprit să dăm demonstraţii complete chiar tuturor rezultatelor evocate, dezamăgind poate pe cei care trebuie să apeleze la manuale mai ample. Studiul individual şi învăţarea activă la matematică, în propriul interes şi dincolo de grija examenelor, trebuie însoţite de rezolvarea de exerciţii; de aceea am adăugat un număr de cîte zece exerciţii la fiecare lecţie, cu indicaţii de rezolvare, şi în acest mod, cartea este implicit şi o ***culegere de probleme****. În plus, nu lipsesc comentarii şi date istorice privind evoluţia unor noţiuni şi idei, iar la sfîrşit am adăugat un index alfabetic, simplificînd găsirea locului în carte al unor concepte sau rezultate care vă pot interesa cu precădere.*

Autorii ţin să mulţumească redactorului cărţii pentru munca sa migăloasă şi tinerei conduceri a Editurii ALL, care s-a încumetat la un act curajos şi înalt educativ, tipărind o lucrare de matematică într-o perioadă dominată, atît de ştiinţele şi practicile "îmbogăţirii spontanee", cît mai ales de griji, sărăcie şi profit nesigur.

Autorii,

Bucureşti, dec. '92

NOTĂ asupra ediţiei a II-a

Manualul de faţă corespunde programelor analitice actuale pentru un curs de două semestre de Analiză Matematică; în raport cu prima ediţie s-au adus unele corecţii şi s-a eliminat prezentarea prea frugală a fractalilor.

Autorii

iulie '95

CUPRINS

Partea I

CALCUL DIFERENȚIAL

LECŢIA I

NUMERE, ŞIRURI DE NUMERE

INTRODUCERE

În această lecţie vom prezenta cîteva noţiuni fundamentale pentru matematică şi pentru diversele descrieri matematice ale realităţii fizice, tehnice, economice, legate de numerele reale şi complexe ca şi de şirurile numerice. Nu vom defini noţiuni primare ca: element, mulţime, colecţie, egalitate, proprietate etc. şi vom folosi un limbaj mai direct, apropiat de expunerea orală. Presupunem cunoscută semnificaţia simbolurilor $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\cup$, $\cap$, $\forall$, $\exists$, **C**.

Înţelegerea corectă a noţiunii de număr real este importantă nu numai pentru matematician, iar denumirea atît de fericită primită dovedeşte rolul lui în determinările cantitative efectuate în cursul cercetării realităţii.

Prin mulţime de numere se subînţelege o mulţime ale cărei elemente se pot afla în anumite "relaţii" (de exemplu, relaţia de inegalitate sau cea de divizibilitate); în plus, cu acele elemente se pot face anumite "operaţii" (de exemplu, adunări, scăderi, înmulţiri etc.). Lărgirea noţiunii de număr, prin incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, reflectă în fond progresul cunoaşterii ştiinţifice.

1. Numere reale

În elaborarea conceptului de număr real, intuiţia algebrico-geometrică şi motivaţia fizică s-au împletit permanent într-un efort de înţelegere şi formalizare desăvîrşit de matematicienii germani G. CANTOR (1845-1918) şi R. DEDEKIND (1831-1916).

Sunt necesare unele pregătiri, legate de conceptul matematic de ordine. Există mai multe proprietăţi relativ la perechi de elemente. De exemplu, faptul că 12 este divizibil cu 4 nu este o proprietate a lui 12 sau a lui 4 separat, ci a perechii (12,4); la fel şi faptul că $4 < 12$. Dacă M este o mulţime, se numeşte

relaţie binară pe M orice colecţie $\mathfrak{R}$ de perechi de elemente ale lui M, adică $\mathfrak{R} \subset M \times M$. Pentru $x,y \in M$, în loc de $(x,y) \in \mathfrak{R}$ se scrie $x \mathfrak{R} y$ şi se spune că "x este în relaţia $\mathfrak{R}$ cu y". O relaţie binară $\mathfrak{R}$ pe mulţimea M se zice **relaţie de ordine parţială** dacă este **reflexivă** $(\forall x \in M, x \mathfrak{R} x)$, **tranzitivă** ($x \mathfrak{R} y, y \mathfrak{R} z$ implică $x \mathfrak{R} z$) şi **antisimetrică** ($x \mathfrak{R} y$ şi $y \mathfrak{R} x$ implică $x = y$); dacă în plus pentru orice $x,y \in M$ avem fie $x \mathfrak{R} y$ fie $y \mathfrak{R} x$, se spune că avem o relaţie de **ordine totală**.

O mulţime M pe care este fixată o relaţie de ordine parţială, notată $\leq$, se numeşte **mulţime ordonată**. Dacă $P \subset M$ este o submulţime nevidă, atunci prin **majorant** al lui P se înţelege un element $x \in M$ astfel încît $\forall a \in P$, avem $a \leq x$. Dacă P admite cel puţin un majorant, ea se zice **majorată**; dacă în plus, P admite un majorant care aparţine lui P, acesta se numeşte **cel mai mare element** al lui P, notat $\max P$ (el este unic, conform proprietăţii de antisimetrie). În mod similar se definesc, dacă există, minoranţii şi cel mai mic element $\min P$.

Dacă $(M, \leq)$ este o mulţime ordonată şi $P \subset M$ este o mulţime nevidă, se spune că P **admite margine superioară** dacă P are majoranţi şi mulţimea acestora are un cel mai mic element, notat cu $\sup P$. În mod similar, P **admite margine inferioară** dacă are minoranţi şi mulţimea lor are un cel mai mare element, notat $\inf P$.

Definiţia I. 1. Se numeşte **mulţime de numere reale** o mulţime R care satisface următoarele proprietăţi:

I. R este un corp comutativ;

II. Pe R există o relaţie de ordine totală $\leq$, compatibilă cu operaţiile algebrice;

III. Orice submulţime nevidă şi majorată a lui R are o margine superioară (adică un cel mai mic majorant).

Comentariu. Proprietatea I. sintetizează disponibilităţile de calcul în R. Astfel, $(R, +, 0)$ şi $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sunt grupuri abeliene (N. ABEL, 1802-1829) şi în plus,

$x(y+z) = xy + xz$, pentru orice $z, y, z \in R$. Se definesc $x - y = x + (-y)$ şi dacă $y \neq 0$, $x/y = xy^{-1}$. Aşadar, în R se pot efectua adunări, scăderi, înmulţiri şi împărţiri cu elemente nenule, cu regulile uzuale de calcul învăţate în gimnaziu şi liceu. Proprietatea II sintetizeză faptul că relaţia $\leq$ este reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică; apoi, pentru orice $x,y \in R$ avem fie $x \leq y$, fie $y \leq x$. În plus, dacă $x \leq y$, atunci $\forall z \in R$, $x + z \leq y + z$, iar dacă $0 \leq x, 0 \leq y$, atunci $0 \leq xy$. Din proprietăţile I, II rezultă binecunoscutele reguli de calcul cu inegalităţi. În fine, proprietatea III, numită şi **"axioma marginii superioare"**, constituie punctul de plecare în stabilirea rezultatelor de bază ale Analizei matematice, care totodată o separă de Algebră. Dacă $P \subset R$ are marginea superioară s, nu rezultă neapărat că $s \in P$; elementul s este caracterizat prin aceea că $\forall x \in P$, $x \leq s$ (s fiind un majorant al lui P) şi $\forall \varepsilon > 0$, există $y \in P$ astfel încît $y > s - \varepsilon$ (căci s este cel mai mic majorant şi ca atare, $s - \varepsilon$ nu este un majorant al lui P).

Există mulţimi satisfăcînd proprietăţile I, II, III; de exemplu, mulţimea fracţiilor zecimale finite şi infinite sau mulţimea punctelor oricărei axe. Se poate demonstra că orice două astfel de mulţimi reprezintă structuri izomorfe, într-un sens uşor de explicitat.

În cele ce urmează, vom fixa o mulţime cu proprietăţile I, II, III; notată cu $\mathbb{R}$, ale cărei elemente se vor numi **numere reale**.

O submulţime $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ se numeşte **inductivă** dacă $0 \in \mathrm{I}$ şi în plus, $\forall x \in \mathrm{I} \Rightarrow x + 1 \in \mathrm{I}$. De exemplu, intervalul $[0, \infty)$ este o mulţime inductivă. Cea mai mică submulţime inductivă (relativ la relaţia de incluziune) este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 = 1 + 1, ..., n, n + 1, ...\}$, adică **mulţimea numerelor naturale**. Principiul **inducţiei matematice** se poate enunţa astfel: dacă $S \subset \mathbb{N}$ este o mulţime inductivă, atunci $S = \mathbb{N}$.

Mulţimea numerelor întregi este $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}$ sau $-x \in \mathbb{N}\}$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există şi este unic $n \in \mathbb{Z}$ astfel încît $n \leq x < n + 1$; se notează $n = [x]$, **partea întreagă a lui** x, de exemplu, $[3,14] = 3$ şi $[-3,14] = -4$.

Mulţimea numerelor raţionale este $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$; ea satisface proprietăţile I, II anterioare; dar nu şi III, deoarece mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ nu are margine superioară în $\mathbb{Q}$. În plus, $\mathbb{Q}$ este **densă** în $\mathbb{R}$ (în sensul că pentru orice numere reale $a < b$, există numere raţionale cuprinse între a şi b; anume, alegem $n \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n > \frac{1}{b-a} \text{ deci } \frac{1}{n} < b - a$$

şi fie $m = [na]$ deci $m \leq na < m + 1$; atunci

$$b > a + \frac{1}{n} \geq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

deci $a < \frac{m+1}{n} < b$, iar $\frac{m+1}{n}$ este raţional).

Comentariu. Denumirea de număr raţional provine de la latinescul "ratio" (raport de numere întregi; astfel,

$$\frac{2}{3},\ -\frac{3}{5} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}).$$

Numerele iraţionale sunt tocmai elementele mulţimii $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi nu sunt deloc în afara raţiunii.

Reamintim că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ se defineşte **modulul lui** x, $|x| = \max(x, -x)$ deci

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \ge 0 \\ -x & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$, numărul $d(x,y) = |x-y|$ reprezintă **distanţa** între x,y.
Sunt astfel definite două funcţii remarcabile, anume:

$$\mathrm{ABS}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| \text{ şi } d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto d(x,y)$$

Au loc proprietăţile următoare binecunoscute:

1^0 $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \ge 0$ şi $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2^0 $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \le |x| + |y|$ şi $|xy| = |x| \cdot |y|$;

3^0 Fie $\varepsilon > 0$; avem $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ şi $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$;

4^0 $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) \ge 0$ şi $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

5^0 $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = d(y,x)$;

6^0 $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

2. Numere complexe

În multe consideraţii se utilizează numerele complexe, apărute iniţial în legătură cu rezolvarea ecuaţiilor algebrice. Marele matematician german C. F. GAUSS (1777-1855) a dat prima demonstraţie riguroasă a teoremei fundamentale a algebrei şi a studiat structura mulţimii $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ a întregilor care îi poartă numele. De obicei datele unei probleme tehnice sau economice sunt exprimate prin numere reale, dar în cursul rezolvării pot fi utilizate ca intermediare numerele complexe; mai mult, la studiul Bazelor electrotehnicii, Mecanicii fluidelor sau în Teoria stabilităţii sistemelor şi în Fizica interacţiilor se utilizează rezultate profunde de Analiză complexă.

Definiţia I. 2. Se numeşte **număr complex** orice pereche ordonată de numere reale. Mulţimea numerelor complexe este $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dacă $z = (a,b)$, $z' = (a',b')$ sunt două numere complexe, atunci prin definiţie, $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ şi $b = b'$. Deci o egalitate de numere complexe echivalează cu două egalităţi în $\mathbb{R}$. Se ştie că relativ la adunarea şi înmulţirea uzuale:

$$z + z' = (a + a', b + b'),\ zz' = (aa' - bb', ab' + a'b);\ 0_{\mathbb{C}} = (0,0),\ 1_{\mathbb{C}} = (1,0),$$

mulţimea $\mathbb{C}$ este un corp comutativ.
Notînd $i = (0,1)$ şi făcînd identificarea între numărul complex $(a,0)$ şi numărul real a, rezultă:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi,$$

obţinînd astfel forma algebrică uzuală. Se observă că

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) \equiv -1$$

deci i este rădăcină a polinomului $x^2 + 1$.

Comentariu. Numerele complexe de forma $(0,b) = bi$ cu $b \ne 0$ au fost numite în mod nefericit imaginare, dar nu au în ele nimic imaginar, misterios; confuzia a plecat de la definirea lui i ca $\sqrt{-1}$, după ce se spusese că numerele negative nu au radical. Definind $i = (0,1)$ ca un număr complex ca oricare altul, dispare orice confuzie şi numerele complexe sunt obiecte matematice cu reguli precise de operare. În unele situaţii se utilizează şi **numerele duale** $a+b\varepsilon$ unde $a,b \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon^2 = 0$; de fapt acestea sunt deasemenea perechi de numere reale (a,b), cu operaţiile $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$ şi $(a,b)\cdot(a',b') = (aa', ab' + a'b)$, iar $\varepsilon = (0,1)$.

Dacă $z = (a,b) = a+bi \in \mathbb{C}$, cu $a,b \in \mathbb{R}$, se notează
Re $z = a$ (**partea reală**), Im $z = b$ (**partea imaginară**),

$\bar{z} = a - bi$ (**conjugatul** lui z) şi $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (**modulul** lui z).

Se cunosc sau se verifică uşor următoarele proprietăţi:

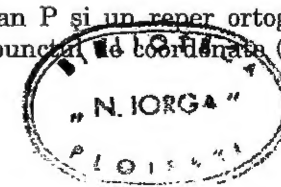
1^0 $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}\,z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;

2^0 $\forall z,z' \in \mathbb{C}$, $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$, $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$ $(z \ne 0)$;

3^0 $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}\,z| \le |z|$, $|\mathrm{Im}\,z| \le |z|$, $|z| \le |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$;

4^0 $\forall z,z' \in \mathbb{C}$, $|z+z'| \le |z| + |z'|$, $|zz'| = |z| \cdot |z'|$, $||z| - |z'|| \le |z - z'|$ şi dacă $z' \ne 0$, $|z/z'| = |z|/|z'|$.

Să considerăm un plan P şi un reper ortogonal xOy; identificăm numărul complex $z = a+bi$ cu punctul de coordonate (a,b) relativ la acest reper. Dacă



$z \neq 0$, fie $r = |z|$ şi $\varphi \in [0, 2\pi)$ unghiul făcut de semidreptele Ox, Oz în sens trigonometric; se mai notează $\varphi = \arg z$, **argumentul** lui z. Atunci $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ şi $z = a+bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, obţinîndu-se **forma trigonometrică** a lui z.

EXEMPLU

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ -3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) \text{ şi } -5i = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Pe mulţimea $\mathbb{C}$ nu se poate defini o relaţie de ordine compatibilă cu operaţiile algebrice (deoarece în caz contrar ar rezulta că $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 \geq 0$; în particular, pentru $z = 1$ şi $z = i$, ar rezulta simultan că $1 \geq 0$ şi $-1 \geq 0$ ceea ce este absurd). De aceea nu se consideră inegalităţi între numere complexe şi în particular, nu se definesc şiruri monotone de numere complexe.

Pentru orice

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2;\ z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2),$$

distanţa euclidiană dintre ele este

$$d(z_1, z_2) = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]^{1/2}.$$

Deoarece $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, rezultă că $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$, deci distanţa euclidiană dintre două numere complexe este tocmai modulul diferenţei lor.

Se verifică imediat următoarele proprietăţi:

D_1 Pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $d(z_1, z_2) \geq 0$, şi $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;

D_2 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

D_3 $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$.

Pe scurt aceste proprietăţi sunt numite pozitivitate, simetrie şi inegalitatea triunghiului.

Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$, mulţimea $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ se numeşte **discul deschis** centrat în z_0, de rază r; mulţimea $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ este **discul închis**, iar $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ este **circumferinţa** de centru z_0 şi rază r.

3. Şiruri de numere reale

Fie E o mulţime oarecare. Dacă I este o mulţime, ale cărei elemente se numesc **indici**, prin **familie** de elemente din E indexată după I se înţelege o funcţie

$f: I \to E, i \mapsto x_i = f(i)$; această familie se mai notează $(x_i)_{i \in I}$. În cazul particular cînd $I = \mathbb{N}$, familiile se numesc **şiruri** şi vom nota $(a_n)_{n \geq 0}$; dacă $E = \mathbb{R}$ (respectiv $\mathbb{C}$) se obţine conceptul de **şir de numere reale** (respectiv **complexe**). Trebuie făcută distincţia dintre şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ şi mulţimea $\{a_n \mid n \geq 0\}$ a termenilor şirului; şiruri distincte pot avea aceeaşi mulţime a termenilor.

Comentariu. Intuitiv, un volum variabil V în spaţiu tinde către 0 dacă **pentru orice** cub de latură ε, $\varepsilon > 0$, V "devine" mai mic decît volumul cubului, începînd de la un anumit "moment". Aceasta sugerează următoarea definiţie esenţială, în care "momentul" este reprezentat prin rangul $N(\varepsilon)$.

Din liceu ştim că un şir $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere reale este **convergent** dacă există un număr real $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $d(a_n, a) = |a_n - a|$ "tinde către zero" cînd n creşte indefinit, adică $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall n \geq N(\varepsilon), |a_n - a| < \varepsilon$. Se mai scrie în acest caz că $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$.

Natura unui şir şi limita lui în caz de convergenţă nu sunt modificate prin modificarea unui număr finit de termeni ai şirului.

EXEMPLUL 1.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n \to \infty} 3^{-n} = 0 \text{ şi } \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e,$$

numărul lui L. EULER (1707 – 1783); se ştie că $e \approx 2{,}71828\ldots$ şi $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

EXEMPLUL 2. $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$; $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$, dar nu şi reciproc.

EXEMPLUL 3. Orice subşir al unui şir $s = (a_n)_{n \geq 0}$ convergent către a, $a \in \mathbb{R}$ este convergent către a [reamintim că dacă se consideră un şir strict crescător de numere naturale $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, atunci şirul $(a_{k_n})_{n \geq 0}$ se numeşte **subşir** al lui s; pentru orice n avem evident $n \leq k_n$. De exemplu, $(a_{2n})_{n \geq 0}$ şi $(a_{2n+1})_{n > 0}$ sunt subşiruri ale lui s, zise subşirurile termenilor de rang par şi respectiv impar].

Reamintim cîteva proprietăţi cunoscute din liceu:

Dacă $a_n \to a$ şi $a_n \to b$, atunci $a = b$ (**unicitatea** limitei unui şir convergent).
Dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$, atunci $a_n + b_n \to a + b$, $-a_n \to -a$, $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ şi dacă $b \neq 0$, atunci $a_n/b_n \to a/b$.

Dacă $a_n \to a$, $b_n \to b$ şi $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq N$, cu N natural fixat, atunci $a \leq b$ (**păstrarea inegalităţilor** prin trecere le limită).
Dacă $a_n \leq x_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq N$ şi $a_n \to a$ şi $b_n \to a$, atunci $x_n \to a$ ("lema cleştelui").

Reamintim că un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale se numeşte **mărginit** dacă mulţimea termenilor $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită în $\mathbb{R}$, adică este conţinută într-un interval compact, sau echivalent $\exists\, M > 0$ astfel încît $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

Se arată uşor că orice şir convergent este mărginit. De asemenea, **orice şir** $(a_n)_{n\geq 0}$ **mărginit şi monoton crescător** (respectiv descrescător) **în $\mathbb{R}$ este convergent către** $\sup a_n$ (respectiv către $\inf a_n$).

Se spune că un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$, $a_n > \varepsilon$ (respectiv $a_n < -\varepsilon$).
Dacă $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq N$ (N natural fixat) şi dacă $a_n \to \infty$, atunci $b_n \to \infty$, iar dacă $b_n \to -\infty$, atunci $a_n \to -\infty$.

TEOREMA I. 1. ("lema intervalelor închise incluse"). Fie $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 0$ un şir descendent de intervale închise, $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ Atunci mulţimea $I = \bigcap_{n\geq 0} I_n$ este nevidă. Dacă în plus $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, atunci mulţimea I este formată dintr-un singur punct.

DEMONSTRAŢIE. Fie $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$ şi $B = \{b_n \mid n \geq 0\}$. Atunci mulţimea A este majorată (de b_0); fie $\xi = \sup A$. În mod similar, mulţimea B este minorată; fie $\eta = \inf B$ (se arată uşor că orice mulţime nevidă mărginită inferior are margine inferioară). Deoarece $a_n \leq b_m$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, $\xi \leq \eta$; totodată avem $a_n \leq \xi \leq \eta \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$ deci $[\xi, \eta] \subset \bigcap_{n\geq 0} I_n$.

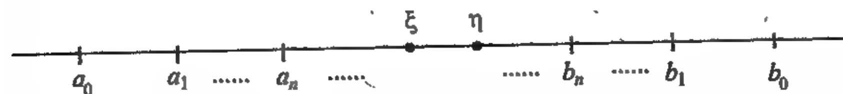


Fig. I. 1.

Dacă în plus $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, din inegalităţile $0 \leq \eta - \xi \leq b_n - a_n$, rezultă $\xi = \eta$ şi ca atare, $\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{\xi\}$.

OBSERVAŢIE. Condiţia de închidere a intervalelor este esenţială; de exemplu, pentru $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$, intersecţia $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ este vidă.

COROLAR (lema lui E. CESARÓ, 1859–1906). Orice şir mărginit în $\mathbb{R}$ are un subşir convergent.

DEMONSTRAŢIE. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit în $\mathbb{R}$ şi $a < b$ astfel încît $a \leq x_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi c mijlocul intervalului $[a,b]$. Dintre intervalele $[a,c]$ şi $[c,b]$ alegem unul cu proprietatea de a conţine o infinitate de termeni ai şirului şi îl notăm $I_1 = [a_1,b_1]$.

Deci: mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_1,b_1]\}$ este infinită; $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$.

Fie c_1 mijlocul intervalului $[a_1,b_1]$. Dintre intervalele $[a_1,c_1]$ şi $[c_1,b_1]$ alegem $I_2 = [a_2,b_2]$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Deci: mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_2,b_2]\}$ este infinită; $b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{2^2}$.

Se construieşte prin inducţie un şir de intervale închise

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots\ ;\ I_k = [a_k,b_k]$$

astfel încît mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_k,b_k]\}$ este infinită; $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Conform teoremei I. 1 rezultă $\bigcap_{k\geq 0} I_k = \{\xi\}$ unde $I_0 = [a,b]$.

Din modul în care au fost construite intervalele I_k putem găsi un şir de numere naturale

$$n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots \text{ şi } x_{n_k} \in I_k\ (\forall\, k \in \mathbb{N}).$$

Deducem din $x_{n_k}, \xi \in I_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

$$|x_{n_k} - \xi| \leq \frac{b-a}{2^k}\ (\forall\, k \in \mathbb{N}) \text{ deci } x_{n_k} \to \xi.$$

Definiţia I. 3. O mulţime E se numeşte **numărabilă** dacă există o aplicaţie bijectivă $f: \mathbb{N} \to E$. În acest caz, rezultă că $E = \{f(n) \mid n \geq 0\}$ este mulţimea termenilor unui şir.

EXEMPLE.

1) Orice submulţime $A \subset \mathbb{N}$ este finită sau numărabilă; într-adevăr, dacă A nu este finită, atunci se poate considera următoarea funcţie bijectivă:

$f : \mathbb{N} \to A$, unde $f(0) = \min A$, $f(1) = \min(A \setminus f(0))$, $f(2) = \min(A \setminus \{f(0), f(1)\})$ etc.

2) Mulţimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă, deoarece aplicaţia

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & n \text{ par} \\ -\frac{1}{2}(n+1), & n \text{ impar} \end{cases}$$

este bijectivă.

3) Reuniunea $E \cup F$ a două mulţimi numărabile E, F este numărabilă, deoarece elementele ei sunt termenii unui şir, obţinut alternînd elementele lui E şi F dispuse în şir.

4) Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie. Dacă f este injectivă şi Y numărabilă, atunci X este finită sau numărabilă, iar dacă f este surjectivă şi X este numărabilă, atunci Y este finită sau numărabilă (prima afirmaţie este imediată iar în cazul secund, se construieşte aplicaţia injectivă $Y \to X$ care asociază oricărui $y \in Y$ un element ales şi fixat în $f^{-1}(y)$).

Aplicînd acest fapt pentru aplicaţia injectivă $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$, rezultă că mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă. Atunci produsul cartezian a oricăror două mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă şi folosind aplicaţia surjectivă $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $f(p,q) = p/q$, rezultă că mulţimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

TEOREMA I. 2. Mulţimea $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să arătăm că intervalul $[0,1]$ nu este o mulţime numărabilă. Pentru a demonstra aceasta, procedăm prin reducere la absurd şi presupunem că ar exista o aplicaţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to [0,1]$, $n \mapsto x_n$. Împărţim intervalul $I_0 = [0,1]$ în trei părţi egale. Cel puţin unul din cele trei intervale nu va conţine x_0 şi fie $I_1 = [a_1, b_1]$ un astfel de interval $\left(b_1 - a_1 = \frac{1}{3}\right)$. Împărţim I_1 în trei părţi egale şi notăm cu $I_2 = [a_2, b_2]$ unul din cele care nu conţine x_1 etc. Se va obţine astfel un şir descendent $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ de intervale închise incluse, astfel încît $x_{n-1} \notin [a_n, b_n] = I_n$ pentru orice $n \geq 1$ şi $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$.

Conform teoremei I.1, rezultă că $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{\xi\}$.

Deoarece $\xi \in [0,1]$ şi f este surjectivă, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $x_n = \xi$. Dar $\xi \in I_{n+1}$ iar $x_n \notin I_{n+1}$ şi se ajunge la o contradicţie.

Orice interval (a,b) sau $[a,b]$ cu $a < b$ este nenumărabil.

COROLAR 1. Mulţimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu este numărabilă.

DEMONSTRAŢIE. În caz contrar, $\mathbb{R}$ ar fi reuniunea a două mulţimi numărabile, deci numărabilă.

COROLAR 2. Orice număr real α este limita unui şir de numere raţionale şi limita unui şir de numere iraţionale.

DEMONSTRAŢIE. În orice interval $\left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$ cu $n \geq 1$ natural, alegem $x_n \in \mathbb{Q}$ şi $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci $x_n \to \alpha$ şi $y_n \to \alpha$, conform lemei cleştelui.

Definiţia I. 4. Un şir de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ se numeşte **fundamental** sau echivalent, **şir Cauchy** (după numele matematicianului francez A. CAUCHY, 1789–1857) dacă $d(a_m, a_n) \to 0$ pentru $m,n \to \infty$, adică $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\ m,n \geq N(\varepsilon)$, $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Comentariu. Dacă $m = n$, această condiţie este evident satisfăcută; dacă de exemplu $m > n$, atunci notînd $p = m - n$; rezultă $p \geq 1$ şi $m = n + p$, iar condiţia anterioară se rescrie astfel:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\ n \geq N(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1$, $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Condiţia ca un şir să fie fundamental este intrinsecă, nedepinzînd de un element exterior cum este limita şirului. Totuşi are loc următorul rezultat intuit cu peste 2000 de ani în urmă de PLATON (428–347 î. C.).

TEOREMA I. 3. (criteriul general al lui Cauchy pentru şiruri în $\mathbb{R}$). Un şir $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere reale este convergent dacă şi numai dacă el este fundamental.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $a_n \to a$, atunci $0 \leq |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|$ deci $\lim_{m,n \to \infty} |a_m - a_n| = 0$ şi şirul rezultă fundamental. Reciproc, dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este fundamental, atunci el este mărginit; într-adevăr, pentru $\varepsilon = 1$ există N natural astfel încît $\forall\ n \geq N$, $|a_n - a_N| < 1$; ca atare, $a_n \in (a_N - 1, a_N + 1)$ pentru orice $n \geq N$ şi toţi termenii şirului $(a_n)_{n \geq 0}$ vor fi cuprinşi într-un acelaşi interval

mărginit care include intervalul $(a_N - 1, a_N + 1)$. Conform lemei lui Cesaró, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ va avea un subşir convergent $a_{k_n} \to a$. Teorema se încheie dacă vom demonstra că $a_n \to a$. Pentru aceasta, fie $\forall\, \varepsilon > 0$ fixat. Alegem N_1 astfel încît $\forall\, m,n \geq N_1$, $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi N_2 astfel încît $\forall\, n \geq N_2$, $|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci luînd $N = \max(N_1, N_2)$ şi $n \geq N$, rezultă $k_n \geq n \geq N$ şi ca atare, $|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ deci $|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ adică $a_n \to a$.

EXEMPLU. Şirul

$$a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}, n \geq 1$$

este un şir fundamental deoarece

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+p)} < \frac{1}{n}$$

pentru orice $p \geq 1$. Conform teoremei I. 3, rezultă că şirul este convergent; nu este simplu de calculat limita lui.

4. Limite inferioare şi superioare de şiruri în $\overline{\mathbb{R}}$

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir oarecare în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definim $\alpha_0 = \inf\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$; $\alpha_1 = \inf\{x_1, x_2, \dots\}$, ..., $\alpha_k = \inf\limits_{n\geq k} x_n$;

$\beta_0 = \sup\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, $\beta_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\}$, ..., $\beta_k = \sup\limits_{n\geq k} x_n$.

Atunci evident

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k \leq \dots \leq \beta_p \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0.$$

Definiţia I. 5. Se numeşte **limita inferioară** a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ elementul

$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$, notat $\alpha = \underline{\lim}\, x_n$; **limita superioară** a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ este

$\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \in \overline{\mathbb{R}}$, notat $\beta = \overline{\lim}\, x_n$ (în $\overline{\mathbb{R}}$ orice şir monoton are limită !).

Evident, $\alpha = \sup\limits_k \alpha_k$, $\beta = \inf\limits_k \beta_k$, deoarece şirul $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ este monoton crescător iar $(\beta_k)_{k\geq 0}$ monoton descrescător. În plus, $\alpha \leq \beta$ deci $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$. Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir mărginit în $\mathbb{R}$, atunci $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Reţinem că limita inferioară (superioară) există **pentru orice** şir în $\mathbb{R}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$.

EXEMPLU. Fie $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$. Atunci $\alpha_k = -1$ şi $\beta_k = 1$ pentru orice k, deci $\underline{\lim}\, x_n = -1$ şi $\overline{\lim}\, x_n = 1$.

TEOREMA I. 4. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir în $\overline{\mathbb{R}}$ şi $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) $a = \underline{\lim}\, x_n$ dacă şi numai dacă $\forall\, u < a$ mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < u\}$ este finită şi $\forall\, v > a$, mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < v\}$ este infinită.

ii) $b = \overline{\lim}\, x_n$ dacă şi numai dacă $\forall\, u < b$, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > u\}$ este infinită şi $\forall\, v > b$, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > v\}$ este finită.

DEMONSTRAŢIE. Fie $a = \underline{\lim}\, x_n$ deci $a = \alpha = \sup\limits_k \alpha_k$. Dacă $a = -\infty$ atunci $\forall\, k$, $\alpha_k = -\infty$ şi pentru orice $v > a$, mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < v\}$ rezultă infinită. Presupunem a finit. Atunci $\forall\, u < a$, există k_0 astfel încît $u < \alpha_{k_0} < a$ deci pentru $n \geq k_0$, $x_n \geq \alpha_{k_0} > u$ adică $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < u\}$ este finită. Iar dacă $v > a$, atunci evident $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < v\}$ este infinită.

Presupunem că invers, a satisface condiţiile din enunţ şi fie $\alpha = \underline{\lim}\, x_n$. Arătăm mai întîi că $a \leq \alpha$. Cazul $a = -\infty$ este evident. Dacă $-\infty < a$ şi $u < a$,

atunci conform ipotezei există k_0 astfel încît $x_n \geq u$ pentru $n \geq k_0$ deci $\alpha_{k_0} \geq u$ şi cum şirul (α_k) este crescător, rezultă $u \leq \alpha$. Deci pentru orice $u < a$, avem $u \leq \alpha$ şi ca atare, $a \leq \alpha$. Folosind cea de-a doua condiţie rezultă $\alpha \leq a$ deci $\alpha = a$.
În mod similar se tratează cazul limitei superioare.
Înainte de a deduce o consecinţă importantă, introducem o noţiune folosită doar în acest paragraf: un element $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct limită** pentru şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\overline{\mathbb{R}}$ dacă există un subşir $x_{k_n} \to \xi$ (în $\overline{\mathbb{R}}$).

COROLAR. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir în $\overline{\mathbb{R}}$.

i) $\underline{\lim}\, x_n$ şi $\overline{\lim}\, x_n$ sunt puncte limită pentru şirul (x_n) şi în plus, pentru orice alt punct limită ξ avem $\underline{\lim}\, x_n \leq \xi \leq \overline{\lim}\, x_n$;

ii) Şirul (x_n) are limita x în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$.

DEMONSTRAŢIE.
i) Presupunem că $a = \underline{\lim}\, x_n$ este finit. În intervalul $(a-1, a+1)$ alegem un termen x_{k_1}; în $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$, alegem x_{k_2} cu $k_2 > k_1$, etc $x_{k_n} \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$; atunci $x_{k_n} \to a$. Similar se tratează celelalte cazuri.

ii) Dacă $x_n \to x$, atunci orice subşir tinde către x deci toate punctele limită coincid cu x în particular, $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$; etc.

5. Şiruri de numere complexe

Definiţia I. 6. Un şir $(z_n)_{n\geq 0}$ de numere complexe se numeşte **convergent** în $\mathbb{C}$ dacă există $z \in \mathbb{C}$ astfel încît $d(z_n, z) \to 0$, adică $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$, $|z_n - z| < \varepsilon$.
Se scrie atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ sau $z_n \to z$.

Dacă există, limita unui şir convergent este unică. Este evident că orice şir convergent în $\mathbb{C}$ are toţi termenii conţinuţi într-un disc; se mai spune că şirul este mărginit.

TEOREMA I. 5. Fie $z_n = a_n + ib_n$, $n \geq 0$ un şir de numere complexe şi $z = a + ib$. Avem $z_n \to z$ în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$ (în $\mathbb{R}$).

DEMONSTRAŢIE. Au loc inegalităţile
$$0 \leq |a_n - a| \leq |z_n - z|,\ 0 \leq |b_n - b| \leq |z_n - z|;$$
dacă $z_n \to z$, atunci aplicînd lema cleştelui rezultă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$.
Reciproca rezultă folosind inegalitatea
$$|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Reţinem deci că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Dacă $z_n \to z$, $w_n \to w$ (în $\mathbb{C}$), atunci $z_n + w_n \to z + w$, $z_n w_n \to zw$ şi pentru $w \neq 0$, $z_n / w_n \to z / w$; pentru demonstraţie se poate proceda ca în cazul şirurilor de numere reale, sau se aplică teorema I.5.

COROLAR (criteriul general Cauchy în $\mathbb{C}$). Un şir $(z_n)_{n\geq 0}$ este convergent în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă este fundamental (adică $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\, m,n \geq N(\varepsilon)$, $|z_m - z_n| < \varepsilon$).

DEMONSTRAŢIE. Fie $z_n = a_n + ib_n$. Şirul (z_n) este convergent în $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ şirurile (a_n), (b_n) sunt convergente în $\mathbb{R} \Leftrightarrow (a_n)$, (b_n) sunt fundamentale în $\mathbb{R} \Leftrightarrow (z_n)$ este fundamental în $\mathbb{C}$; ultima echivalenţă rezultă din inegalităţile evidente:
$|a_m - a_n| \leq |z_m - z_n|$, $|b_m - b_n| \leq |z_m - z_n|$, $|z_m - z_n| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$.

Am văzut că mulţimea $\mathbb{R}$ poate fi inclusă în mulţimi "mai mari". Incluziunea $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ se realizează prin conservarea structurii de corp comutativ (cu extinderea operaţiilor algebrice), dar cu pierderea structurii de ordine. Incluziunea $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ se realizează prin păstrarea ordinii, dar se pierde structura algebrică (adunarea şi înmulţirea nu mai sunt peste tot definite în $\overline{\mathbb{R}}$; de exemplu, nu se definesc $\infty + (-\infty)$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞ etc.). Remarcăm că în $\overline{\mathbb{R}}$ orice şir este mărginit, orice şir monoton are limită şi orice submulţime nevidă $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ are margine superioară şi margine inferioară.

Comentariu. În matematică şi în filozofie conceptul de infinit apare în două ipostaze - infinitul actual şi infinitul potenţial. În matematică infinitul actual revine la a considera elementele $+\infty$, $-\infty$ ca elemente neprivilegiate în mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$. Infinitul potenţial este definit numai cu ajutorul numerelor reale finite: $+\infty$ apare ca asociat oricărui şir (x_n) din $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ astfel încît $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$, $x_n > \varepsilon$, iar $-\infty$ este asociat oricărui şir (y_n) din $\mathbb{R}$ pentru care $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$

$\forall\, n \geq N(\varepsilon)$, $y_n < -\varepsilon$. Formula $\infty + \infty = \infty$ reflectă faptul că dacă $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, atunci $x_n + y_n \to \infty$; similar $-\infty + a = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$ înseamnă că dacă $x_n \to -\infty$, $y_n \to a$, atunci $x_n + y_n \to -\infty$. Faptul că $0 \cdot \infty$ nu capătă sens precis rezultă din aceea că dacă $x_n \to \infty$, $y_n \to 0$, atunci nu se poate afirma nimic despre produsul $x_n y_n$ etc.

În mulţimea $\mathbb{C}$ nu există "la stînga" şi "la dreapta" ca în cazul lui $\mathbb{R}$ (unde de exemplu -3 este la stînga lui 2). De aceea se adugă la $\mathbb{C}$ un singur punct la infinit, notat ∞ şi se consideră $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Se spune că un şir (z_n) de numere complexe **tinde către** ∞ dacă $|z_n| \to +\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$; prin convenţie, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\infty + z = \infty$ (în sensul că dacă $z_n \to \infty$, atunci $z_n + z \to \infty$); apoi $\infty z = z \cdot \infty = \infty$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. De asemenea $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty/0 = \infty$ şi $z/0 = \infty$ pentru $z \neq 0$, $z/\infty = 0$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Nu se definesc $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞ în $\overline{\mathbb{C}}$.

EXEMPLUL 1. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{ni + 7}{2ni - 3} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n\left(i + \dfrac{7}{n}\right)}{n\left(2i - \dfrac{3}{n}\right)} = \dfrac{i}{2i} = \dfrac{1}{2}$.

EXEMPLUL 2. Şirul $(-2)^n$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ dar tinde către ∞ în $\overline{\mathbb{C}}$.

EXEMPLUL 3. Fie $z_n = a^n$ cu $a \in \mathbb{C}$ fixat. Dacă $|a| > 1$, atunci $|z_n| = |a|^n \to \infty$ deci $z_n \to \infty$; dacă $|a| < 1$, atunci $z_n \to 0$ iar dacă $|a| = 1$, $a \neq 1$, atunci şirul (z_n) nu are limită; în fine pentru $a = 1$, $z_n \to 1$.

6. Funcţii reale şi funcţii complexe

Se numeşte **funcţie reală** orice funcţie $f : X \to \mathbb{R}$, cu valori reale. Imaginea ei $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ se mai numeşte domeniul **strict** de valori al lui f. Marginea superioară şi respectiv inferioară ale lui f sunt:

$$\sup f = \sup f(X) \text{ şi } \inf f = \inf f(X),$$

calculate în $\overline{\mathbb{R}}$; acestea se mai numesc **extremele globale ale lui** f **pe mulţimea** X.

Cele mai simple funcţii reale sunt funcţiile **polinomiale** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R};\, a_0 \neq 0).$$

Calculul valorii $P(x)$ pentru orice x fixat revine la efectuarea unui număr finit de adunări şi înmulţiri. Mulţimea $Z(P)$ a zerourilor (sau rădăcinilor) lui P este finită, avînd cel mult n elemente în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Pentru $n = 1,2$ există formule

explicite de determinare a mulţimii $Z(P)$. Pentru $n = 3$ şi $n = 4$ există de asemenea formule ceva mai complicate şi fără utilitate, datorate matematicienilor italieni CARDANO şi FERRARI, iar pentru $n \geq 5$, matematicianul norvegian ABEL a demonstrat că nu există în general formule de exprimare a rădăcinilor cu ajutorul coeficienţilor.

Funcţia raţională P/Q (cu P,Q polinoame) este o funcţie reală definită pe $\mathbb{R} \setminus Z(Q)$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ se defineşte **funcţia putere de exponent** α, $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$; în cazul $\alpha \in \mathbb{N}$, domeniul de definiţie devine întreg $\mathbb{R}$. Pentru $\alpha \neq 0$ restricţia $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \mapsto x^\alpha$ este bijectivă şi $f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$.

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, se defineşte **funcţia exponenţială în baza** a, anume $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$, cu proprietăţile binecunoscute; în acest caz, $g : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ este bijectivă şi $g^{-1}(x) = \log_a x$. Un caz important este

$$a = \mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Relaţia $\ln x = \log_e x = m$ înseamnă $x > 0$ şi $\mathrm{e}^m = x$. O formulă importantă este următoarea:

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \text{ pentru orice } x > 0 \text{ şi orice } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Este interesant că EULER a ajuns la definirea numărului e, care îi poartă numele, pornind de la problema determinării funcţiilor reale derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ şi $f(0) = k$ ($k \in \mathbb{R}$ fixat). Acum ştim că există o singură funcţie cu această proprietate, anume $f(x) = k\mathrm{e}^x$. Funcţiile considerate anterior sunt cazuri particulare de funcţii reale elementare asupra cărora vom reveni cu o discuţie mai amplă după studiul seriilor de puteri. O extindere importantă o reprezintă funcţiile complexe elementare - polinoame cu coeficienţi complecşi, funcţii raţionale, e^z, $\sin z$ etc.

O funcţie $f : A \to \mathbb{C}$ ($A \subset \mathbb{C}$) se numeşte **funcţie complexă de variabilă complexă**. Graficul unei astfel de funcţii $G_f = \{(z, f(z)) \mid z \in A\}$ este o submulţime a lui $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$ (în timp ce graficul unei funcţii reale de variabilă reală este o submulţime a lui $\mathbb{R}^2$). Funcţiile complexe vor fi studiate ulterior; menţionăm doar că nedefinindu-se inegalităţi între numere complexe, nu se definesc nici extreme nici monotonie în cazul funcţiilor complexe. Pentru $f : X \to \mathbb{C}$, nu se definesc $\sup f(x)$, $\inf f(x)$; au însă sens $\sup\limits_{x \in X} |f(x)|$, $\inf\limits_{x \in X} |f(x)|$.

7. 10 exerciţii

1. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie.
a) Dacă $A,B \subset X$, să se arate că $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
b) Dacă $P,Q \subset Y$, $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$, $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$ şi $f^{-1}(\complement P) = \complement f^{-1}(P)$ ($f^{-1}(P) = \{x \in X;\, f(x) \in P\}$).

2. Fie M o mulţime şi $f: M \to M$ o aplicaţie. Să se arate că dacă $f \circ f = 1_M$, atunci f este bijectivă.

3. Să se arate că aplicaţia $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

este bijectivă.

4. Fie M o mulţime şi $(P_n)_{n \geq 0}$ un şir de submulţimi ale lui M.
Se notează $\underline{\lim} P_n = \bigcup_{m \geq 0} \bigcap_{n \geq m} P_n$, $\overline{\lim} P_n = \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} P_n$.

a) Să se arate că

$$\underline{\lim} P_n = \{x \in E \mid x \text{ aparţine la toţi } P_n \text{ începînd de la un rang}\}$$

şi că

$$\overline{\lim} P_n = \{x \in E \mid x \text{ aparţine la o infinitate de mulţimi } P_n\}.$$

b) Şirul $(P_n)_{n \geq 0}$ se zice **convergent** dacă $\underline{\lim} P_n = \overline{\lim} P_n$. Să se arate că dacă (P_n) este un şir ascendent (adică $\forall n \geq 0$, $P_n \subset P_{n+1}$) sau descendent ($\forall n \geq 0$, $P_n \supset P_{n+1}$), atunci el este convergent.

5. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă subşirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}) au aceeaşi limită $l \in \overline{\mathbb{R}}$, să se arate că $x_n \to l$.

6. Să se arate că şirurile $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \geq 1}$, $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ sunt convergente, dar $(\sin n)_{n \geq 1}$ nu are limită.

7. Pentru orice două şiruri în $\mathbb{R}$, $x = (x_n)_{n \geq 0}$, $y = (y_n)_{n \geq 0}$ se defineşte **convoluţia** lor $z = x * y$, ca fiind şirul $z = (z_n)_{n \geq 0}$ unde $z_n = \sum_{p=0}^{n} x_p y_{n-p}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ se notează cu δ_k şirul cu toţi termenii nuli, exceptînd termenul de rang k, egal cu 1.

a) Să se arate că pentru orice şir x, $x * \delta_0 = \delta_0 * x = x$; calculaţi $x * \delta_k$.

b) Să se dea exemplu de şiruri mărginite x, y astfel încît $x * y$ să nu fie mărginit.

8. Să se calculeze $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ pentru

a) $x_n = \frac{(-1)^n \cdot 2n}{n+1}$;

b) $x_n = (-2)^n$;

c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$, $n \geq 1$.

9. Să se calculeze:

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{1 + in^2}{n + 4n^2}$;

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{i^n}{n}$;

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{(1+i)^n}{n}$;

d) $\lim_{n \to \infty} (1 + a + a^2 + \ldots + a^n)$, $a \in \mathbb{C}$.

10. a) Să se determine extremele globale ale funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x$.

b) Să se calculeze $m = \inf_{|z| \leq 1} |z^2 + 1|$ şi $M = \sup_{|z| \leq 1} |z^2 + 1|$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Se probează prin dublă incluziune.

2. Dacă $f(x) = f(y)$ şi aplicăm f, rezultă $f(f(x)) = f(f(y))$ adică $(f \circ f)(x) = (f \circ f)(y)$ deci $1_M(x) = 1_M(y)$, adică $x = y$. Aşadar f este injectivă etc.

3. Avem $f(0,0) = 0$; $f(0,1) = 1$; $f(1,0) = 2$; etc. Deci lui $(0,0)$, f îi asociază numărul de ordine 0, punctelor cu coordonate naturale de pe dreapta $x + y = 1$ le asociază 1,2 etc. Pe fiecare dreaptă $x + y = a$ cu $a \in \mathbb{N}$ se află $a + 1$ puncte cu ambele coordonate numere naturale, anume $(a,0)$, $(a-1,1)$, ..., $(0,a)$. Aplicaţia f asociază fiecărui astfel de punct un număr natural reprezentînd un anumit număr de ordine. Punctul $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se află pe dreapta $x + y = m + n$; punctele numerotate anterior sunt situate pe dreptele $x + y = 0$, $x + y = 1$, ..., $x + y = m + n - 1$ şi vor fi în număr de

$$1 + 2 + \ldots + (m+n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}.$$

Pe dreapta $x + y = m + n$ anterior numerotate se află punctele cu abscisele 0, 1, ..., $m - 1$ (în număr de m). Deci punctul (m,n) va avea numărul de ordine

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m = f(m,n).$$

Faptul că aplicaţia f este bijectivă devine acum evident.

4. a) Se probează prin dublă incluziune.

b) Dacă (P_n) este ascendent, atunci $\underline{\lim} P_n = \overline{\lim} P_n = \bigcup_{n \geq 0} P_n$

şi în cazul descendent, $\bigcap_{n \geq 0} P_n$.

5. Se aplică definiţia limitei.

6. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=0$ căci $\frac{1}{n}\to 0$, iar şirul ($\sin n$) este mărginit;

apoi $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)/\left(\frac{1}{n}\right)=1$. Dacă $\sin n\to l$ atunci $\sin(n+2)-\sin n\to 0$ deci $2\sin 1\cos(n+1)\to 0$ deci $\cos n\to 0$. Rezultă $\sin 2n\to 0$ deci $l=0$. În fond $\lim\sin n=\lim\cos n=0$ contradicţie cu $\sin^2 n+\cos^2 n=1$.

7. a) $x*\delta_k$ este şirul $(z_n)_{n\geq 0}$, unde $z_n=\sum\limits_{p=0}^{n}x_p(\delta_k)_{n-p}$. Dar $(\delta_k)_{n-p}=0$ pentru $k\neq n-p$

şi ca atare

$$z_n=\begin{cases}x_{n-k} & \text{dacă } n\geq k\\ 0 & \text{dacă } n<k\end{cases}$$

b) Fie x şirul constant $x=(x_n)_{n\geq 0}$ unde $x_n=1$;

în acest caz, $x*x=(z_n)_n$ unde $z_n=\sum\limits_{p=0}^{n}x_p x_{n-p}=n+1$.

8. a) $-2,2$
b) $-\infty,\infty$
c) $0,1$

9. a) $\frac{i}{4}$;
b) În general, dacă $x_n\to 0$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir mărginit în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, atunci $x_n y_n\to 0$.
Luînd $x_n=\frac{1}{n}$ şi $y_n=i^n$, se vede că $x_n\to 0$ şi $|y_n|=1$.

c) $\left|\frac{(1+i)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}2^{n/2}\to\infty$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+i)^n}{n}=\infty$.

d) Avem $1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ pentru $a\neq 1$. Dacă $|a|<1$, limita este $\frac{1}{1-a}$, iar dacă $|a|>1$, limita este ∞. Dacă $|a|=1$, $a\neq 1$ limita nu există şi în fine, pentru $a=1$, limita va fi ∞.

10. a) $\inf f(x)=f(1)=-1$; $\sup f(x)=+\infty$. Apoi $g'(x)=\frac{4x-x^2-1}{(x^2+1)^2}$ se anulează în $2\pm\sqrt{3}$;

$\sup g(x)=\max(g(2+\sqrt{3}),2+\frac{\pi}{2})$ etc.

b) Avem $|z^2+1|\geq 0$ $(\forall)z$ $(|z|\leq 1)$ şi $|z^2+1|=0$ pentru $z=i$, deci $m=0$. Analog $|z^2+1|\leq|z^2|+1\leq 2$ pentru $|z|\leq 1$ şi $|z^2+1|=2$ pentru $z=1$ deci $M=2$.

ANEXĂ LA LECŢIA I

Numerele reale şi măsurarea mărimilor

Un grup abelian $(G,+,0)$ se numeşte **arhimedian** (ARHIMEDE, 287 - 212 î.Cr.) dacă pe mulţimea G este definită o relaţie de ordine totală $\leq$ astfel încît

$$\{\alpha\leq\beta\Rightarrow\forall\gamma\in G,\ \alpha+\gamma\leq\beta+\gamma\}\text{ şi}$$

$$\{\forall\alpha,\beta\in G,\ \alpha>0,\text{ există } n\geq 1 \text{ natural astfel încît } n\alpha\geq\beta\}.$$

Elementele lui G se numesc mărimi abstracte.

Evident, $\mathbb{R}$ este un grup arhimedian. Mulţimea temperaturilor formează de asemenea un grup arhimedian (pentru că ştim să definim 0, T_1+T_2, $T_1\leq T_2$ şi dacă $U>0$ este o temperatură fixată, atunci pentru orice temperatură T există $n\geq 1$ întreg astfel încît $nU\geq T$). În mod similar, mulţimile presiunilor, lungimilor, maselor, volumelor, vitezelor (imaginînd presiuni, lungimi etc. negative), se pot organiza ca grupuri arhimediene. Mărimile fizice, chimice, indicatorii economici etc. pot fi astfel modelate matematic prin grupuri arhimediene, deci prin mulţimi de elemente care pot fi adunate, se pot compara şi se pot măsura (relativ la o unitate de măsură fixată), cu respectarea intuiţiei şi a logicii. Teorema următoare sintetizează experienţa noastră în asocierea de numere reale celor mai variate tipuri de mărimi şi poate fi atribuită lui EUCLID (sec. III î. Cr.), care a intuit-o pentru mărimile geometrice.

TEOREMĂ. Fie G un grup arhimedian şi un element fixat $U\in G$, $U>0$ ("unitatea de măsură"). Atunci există şi este unică o aplicaţie injectivă $m_U: G\to\mathbb{R}$ astfel încît:
1^0 $m_U(0)=0$ şi $m_U(U)=1$;
2^0 $\forall\ \alpha,\beta\in G$, $m_U(\alpha+\beta)=m_U(\alpha)+m_U(\beta)$ şi $\forall\ n\in\mathbb{Z}$, $m_U(n\alpha)=nm_U(\alpha)$;
3^0 m_U este strict crescătoare $(\alpha<\beta\Rightarrow m_U(\alpha)<m_U(\beta))$.

Numărul $m_U(\alpha)$ se mai numeşte măsura mărimii α, relativ la unitatea de măsură U. Dacă $V\in G$, $V>0$ este o altă unitate de măsură, atunci din teorema anterioară rezultă că raportul $\frac{m_U(\alpha)}{m_V(\alpha)}$ este independent de α, anume egal cu $m_U(V)$.

Se poate dezvolta un "dicţionar fizico-matematic", indicînd resursa de bază a modelării matematice a diverselor porţiuni ale realităţii.

Acest dicţionar poate fi precizat, extins şi recomandăm cititorului să urmărească acest lucru în legătură cu diversele noţiuni pe care le va întîlni în continuare.

Model fizic	Model matematic
mărime	număr real
pereche de mărimi	pereche de numere reale sau număr complex

Model fizic	Model matematic
mărime variabilă depinzînd de altă mărime, $y = f(x)$	funcţie reală de o variabilă reală $f: A \to B$, precizînd şi domeniile de variaţie pentru valorile mărimilor x şi y
mărime variabilă depinzînd de n mărimi, $y = f(x_1,...,x_n)$	funcţie reală de n variabile reale, $f: A \to B; A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}$
mărime care variază continuu, fără salturi	funcţie reală continuă
viteza de variaţie a unei mărimi $y = f(x)$, începînd de la valoarea x_0	derivata $f'(x_0)$, în ipoteza că aceasta există
lege fizică	ecuaţie etc.

LECŢIA A II-A

SERII NUMERICE

INTRODUCERE

Există cazuri cînd unui şir infinit $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale sau complexe i se poate atribui o sumă bine determinată, extinzînd astfel noţiunea de sumă finită. Seriile au ridicat probleme serioase fondatorilor Analizei matematice – G. W. LEIBNIZ (1646 - 1716), I. NEWTON (1643 - 1727) (şi altor matematicieni) şi numai după ce s-au definit riguros numerele reale şi complexe, ca şi noţiunea de convergenţă a şirurilor, s-a putut dezvolta o teorie coerentă a seriilor. În lipsa rigorii, sumele infinite de tipul $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ au dat mari bătăi de cap; punînd paranteze aşa: $(1 - 1) + (1 - 1) + ...$ suntem tentaţi să atribuim suma 0, dar scriind $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - ...$ apare tentaţia să atribuim suma 1; apoi ţinînd cont că

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... = \frac{1}{1+x} \text{ pentru } x \in (-1,1),$$

pentru $x \to 1$, apare o a treia ispită, anume suma $\frac{1}{2}$. În orice caz, "jocul cu infinitul" este plin de capcane, în lipsa conceptelor solide. În această lecţie, vom vedea că seria anterioară este divergentă şi că grupările de termeni nu sunt totdeauna posibile şi vom demonstra cîteva rezultate fundamentale pentru cultura şi practica matematică.

1. Convergenţă, sumă

Vom considera serii de numere complexe; cazul seriilor de numere reale va fi un caz particular.

Definiţia II. 1. Fie $(u_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere complexe şi $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ $(n \geq 0)$, numit **şirul sumelor parţiale** asociat. Se numeşte **serie de termen general** u_n, perechea de şiruri (u_n), (s_n) reprezentată de simbolul $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n ...$; seria se mai notează $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, se numeşte **convergentă** (pe scurt C) dacă şirul $(s_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale este convergent (în $\mathbb{C}$); în acest caz, numărul complex $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numeşte **suma seriei** şi este notat $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

Seriile care nu sunt convergente se numesc **divergente** (pe scurt D). Prin **natura** unei serii se înţelege proprietatea ei de a fi C sau D.

Comentariu. În studiul seriilor, rolul principal îl au sumele parţiale şi de aceea se poate afirma că teoria seriilor este o "combinaţie" între studiul sumelor finite şi al limitelor de şiruri. Este eronată definirea seriilor ca "sume infinite", deoarece în $\mathbb{C}$ sau în $\mathbb{R}$ au sens doar sume finite de numere. Seriile au proprietăţi diferite de cele ale sumelor finite; de exemplu, nu totdeauna avem comutativitate, asociativitate etc. Trebuie de asemenea să distingem între o serie convergentă $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ (care este un concept matematic nou, definit ca o pereche de şiruri cu anumite proprietăţi) şi suma acelei serii, care este un număr.

Dacă se modifică un număr **finit** de termeni ai unei serii, atunci seria nou obţinută va avea aceeaşi natură ca seria iniţială; însă în caz de convergenţă, această operaţie poate modifica suma seriei.
În studiul unei serii numerice (adică de numere reale sau complexe), problema principală o constituie determinarea naturii ei şi în caz de convergenţă, se cere evaluarea exactă sau aproximativă a sumei seriei respective.

EXEMPLUL 1. Seria $1 - 1 + 1 - 1 + ...$, cu termenul general $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ este D, deoarece şirul sumelor parţiale este 1, 0, 1, 0,... şi acesta este divergent. De asemenea seria $1 + 1 + 1 + ...$ este D, deoarece $s_n = n + 1 \to \infty$.

EXEMPLUL 2. **Seria geometrică de raţie** q $(q \in \mathbb{C})$ este seria

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + ... q^n + ... ;$$

în acest caz,

$$s_n = 1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{pentru } q \neq 1).$$

Seria este C $\Leftrightarrow |q| < 1$ şi în acest caz, are suma $\frac{1}{1-q}$.

În mod similar, seria $\sum\limits_{n\geq 0} \kappa q^n$ $(\kappa \neq 0$ constant) este C $\Leftrightarrow |q| < 1$.

EXEMPLUL 3. Dacă seriile

$$\sum_{n\geq 0} u_n, \sum_{n\geq 0} v_n$$

sunt C cu sumele s, t, atunci seriile

$$\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n),\ \sum_{n\geq 0} (u_n - v_n),\ \sum_{n\geq 0} \lambda u_n \ (\lambda \in \mathbb{C} \text{ constant})$$

sunt evident C, cu sumele $s + t$, $s - t$, λs respectiv.

EXEMPLUL 4. Direct din definiţie şi aplicînd teorema I. 5, rezultă că o serie

$$\sum_{n\geq 0} z_n,\ z_n = x_n + iy_n$$

de numere complexe este C $\Leftrightarrow$ seriile de numere reale

$$\sum_{n\geq 0} x_n,\ \sum_{n\geq 0} y_n$$

sunt C şi în plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

EXEMPLUL 5. Fie $k_1 < k_2 < ... < k_n < ...$ un şir strict crescător de numere naturale; dacă seria $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ este C cu suma s, atunci notînd

$$w_1 = z_1 + ... + z_{k_1},\ w_2 = z_{k_1+1} + ... + z_{k_2}, ...,\ w_n = z_{k_{n-1}+1} + ... + z_{k_n} \text{ etc.,}$$

seria $\sum_{n\geq 1} w_n$ este de asemenea C cu suma s, deoarece sumele parțiale

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_{k_1} + z_{k_1+1} + \ldots + z_{k_2} + \ldots + z_{k_n}$$

converg către s. Pentru serii D acest fapt nu are loc; astfel, seria

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

diferă de seriile

$$(1-1) + (1-1) + \ldots \text{ sau } 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots,$$

ceea ce arată că proprietățile sumelor finite nu se extind fără precauții la serii.

TEOREMA II. 1. (criteriul necesar de convergență). Fie seria $\sum_{n\geq 0} u_n$.

a) Dacă seria este C, atunci $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

b) Dacă $\lim_{n\to\infty} u_n$ nu există, sau există dar este nenulă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este D.

DEMONSTRAȚIE. a) Fie

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = s_{n-1} + u_n$$

deci

$$u_n = s_n - s_{n-1}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Conform ipotezei, există

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \text{ (suma seriei)}$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

b) Rezultă din a) prin reducere la absurd.

Comentariu. Așadar, pentru o serie C este necesar ca termenul ei general să tindă către zero. Reciproca este falsă, așa cum arată exemplul seriei

$$\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

în acest caz,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

dar seria este D, deoarece

$$s_n = \sqrt{n+1} \to \infty.$$

În unele formule se utilizează și produse infinite

$$\prod_{n\geq 1} z_n;$$

un astfel de produs se zice convergent, dacă șirul

$$\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)_{n\geq 1}$$

are o limită finită; uneori prin logaritmare se trece la serii.

TEOREMA II. 2 (criteriul general al lui Cauchy pentru serii). O serie numerică $\sum_{n\geq 0} u_n$ este C $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încît

$$\forall n \geq N(\varepsilon) \text{ și } \forall p \geq 1,\ |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ deci

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \quad (n \geq 0,\ p \geq 1).$$

Concluzia rezultă din următorul șir de echivalențe logice: seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este C $\Leftrightarrow$ șirul (s_n) este convergent $\Leftrightarrow$ șirul (s_n) este fundamental $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$, $p \geq 1$, $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$.

COROLAR. Seria armonică

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ este D.}$$

DEMONSTRAȚIE. În caz contrar, seria ar rezulta C și pentru $\varepsilon = \frac{1}{3}$ alegem N ca în teorema II.2. Luînd $n = N$ și $p = N$, rezultă

$$u_{N+1} + \ldots + u_{2N} < \frac{1}{3}$$

deci

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{2N} > \underbrace{\frac{1}{2N} + \ldots + \frac{1}{2N}}_{N \text{ termeni}} = \frac{1}{2};$$

absurd.

TEOREMA II. 3. (criteriul lui Abel). Fie $\sum_{n\ge 0} u_n$ o serie numerică avînd şirul sumelor parţiale mărginit. Atunci pentru orice şir $(\alpha_n)_{n\ge 0}$ de numere reale, pozitive, monoton descrescător cu limita zero (se mai scrie $\alpha_n \downarrow 0$), seria $\sum_{n\ge 0} \alpha_n u_n$ este C.

DEMONSTRAŢIE. Fie $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$; conform ipotezei, $\exists M > 0$, $|s_n| \le M$, pentru orice $n \ge 0$. Avem

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p-1}u_{n+p-1} + \alpha_{n+p}u_{n+p}| =$$

$$= |\alpha_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \alpha_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \dots +$$

$$+ \alpha_{n+p-1}(s_{n+p-1} - s_{n+p-2}) + \alpha_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| =$$

$$= |-\alpha_{n+1}s_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})s_{n+1} + \dots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})s_{n+p-1} + \alpha_{n+p}s_{n+p}| \le$$

$$\le M(|-\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}| + \dots + |\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}| + |\alpha_{n+p}|).$$

Dar $\forall k$, $\alpha_k - \alpha_{k+1} \ge 0$, deoarece şirul (α_n) este monoton descrescător. Va rezulta că

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \le$$

$$\le M(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p}) = 2M\alpha_{n+1}.$$

Vom aplica acum teorema II. 2. Fie $\forall \varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $\alpha_{n+1} \to 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît $\forall n \ge N(\varepsilon)$,

$$\alpha_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ deci } \forall p \ge 1, \text{ deci } |\alpha_{n+1}u_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \le 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Conform teoremei II. 2, rezultă că seria $\sum_{n\ge 0} \alpha_n u_n$ este C.

COROLAR 1. (criteriul lui Leibniz). Fie $\alpha_n \downarrow 0$ un şir monoton descrescător de numere reale pozitive, cu limita zero. Atunci seria alternată

$$\sum_{n\ge 0} (-1)^n \alpha_n = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots \text{ este C.}$$

DEMONSTRAŢIE. În criteriul lui Abel II. 3 luăm $u_n = (-1)^n$; şirul sumelor parţiale 1, 0, 1, 0,... este mărginit.

COROLAR 2. Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ este C;}$$

de asemenea seria $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ este C.

DEMONSTRAŢIE. Se aplică direct criteriul lui Leibniz.

Definiţia II. 2. O serie numerică $\sum_{n\ge 0} u_n$ se numeşte **absolut convergentă** (AC) dacă seria de numere reale şi pozitive $\sum_{n\ge 0} |u_n|$ este C.

Orice serie AC este C, aşa cum rezultă din inegalitatea

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

aplicînd teorema II.2 de două ori. Reciproca este falsă, aşa cum arată exemplul seriei armonice alternate, care este C dar nu AC.

2. Serii de numere reale şi pozitive

Următoarele criterii de convergenţă sunt cele mai utilizate.

LEMĂ. O serie de numere reale şi pozitive este C $\Leftrightarrow$ şirul sumelor ei parţiale este mărginit.

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să observăm că şirul sumelor parţiale este în acest caz monoton crescător; pentru şiruri monotone, convergenţa este echivalentă cu mărginirea.

TEOREMA II. 4 (criteriul de comparaţie cu inegalităţi). Fie $\sum_{n\ge 0} u_n$, $\sum_{n\ge 0} v_n$ două serii de numere reale şi pozitive astfel încît $\exists N$ natural şi $\forall n \ge N$, $u_n \le v_n$. Dacă seria $\sum_{n\ge 0} v_n$ este C, atunci şi seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este C (deci dacă seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este D, atunci $\sum_{n\ge 0} v_n$ este D).

DEMONSTRAȚIE. Modificînd eventual primii N termeni ai ambelor serii (ceea ce nu modifică natura lor) putem presupune că $u_n \le v_n$ pentru orice $n \ge 0$. Fie

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \quad t_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

deci $0 \le s_n \le t_n$ pentru orice $n \ge 0$. Dacă seria $\sum_{n\ge 0} v_n$ este C, atunci șirul (t_n) este convergent deci mărginit, deci șirul (s_n) este mărginit și conform lemei anterioare, seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este C.

EXEMPLU. Deoarece

$$\frac{1}{2^n + 5^n} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pentru orice } n \ge 0 \text{ și seria}$$

$$\sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

este C, conform teoremei II. 4 va rezulta că și seria

$$\sum_{n\ge 0} \frac{1}{2^n + 5^n} \text{ este C.}$$

TEOREMA II. 5. (criteriul de comparație la limită). Fie $\sum_{n\ge 0} u_n$, $\sum_{n\ge 0} v_n$ două serii de numere reale și pozitive, astfel încît să existe limita

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \text{ în } \mathbb{R}.$$

a) Dacă $\sum_{n\ge 0} v_n$ este C, atunci și $\sum_{n\ge 0} u_n$ este C.

b) Dacă $l \ne 0$, atunci cele două serii au aceeași natură.

DEMONSTRAȚIE. a) Conform definiției limitei, există N natural astfel încît $0 \le \frac{u_n}{v_n} < l + 1$ pentru orice $n \ge N$ deci $u_n < (l+1)v_n$. Putem aplica teorema II. 4.

b) Dacă $l \ne 0$, se poate aplica raționamentul de la a) pentru șirul $\frac{v_n}{u_n} \to \frac{1}{l}$ și

rezultă că dacă seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este C, atunci seria $\sum_{n\ge 0} v_n$ este C. Astfel, cele două serii sunt simultan C (și ca atare, simultan D).

EXEMPLU. Seria $\sum_{n\ge 1} \frac{5n^2+1}{n^3+9n}$ este D, deoarece are aceeași natură cu seria $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n}$; într-adevăr, notînd $u_n = \frac{5n^2+1}{n^3+9n}$ și $v_n = \frac{1}{n}$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 5$$

și aplicăm teorema II. 5.

Un criteriu suficient de convergență, de asemenea util, îl constituie:

TEOREMA II. 6. (criteriul integral al lui Cauchy). Fie $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ o funcție monoton descrescătoare, cu valori pozitive. Seria

$$\sum_{n\ge 1} f(n) \text{ este C} \Leftrightarrow \text{șirul } v_n = \int_1^n f(x)\,dx \text{ este convergent.}$$

DEMONSTRAȚIE. Notăm $s_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Deoarece pentru orice $x \in [k-1, k]$, $k \ge 2$ avem $f(k) \le f(x) \le f(k-1)$, rezultă prin integrare că:

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,d(x) \le f(k-1).$$

Însumînd aceste inegalități pentru $k = \overline{2,n}$, va rezulta inegalitatea dublă

$$f(2) + \ldots + f(n) \le \int_1^n f(x)\,d(x) \le f(1) + \ldots + f(n-1), \text{ deci } s_n - f(1) \le v_n \le s_{n-1}.$$

Dacă seria

$$\sum_{n\ge 1} f(n)$$

este C, rezultă că șirul (s_n) este convergent deci este mărginit; deci (v_n) este mărginit și fiind monoton crescător, (v_n) este convergent. Reciproc, dacă șirul

(v_n) este convergent, el este mărginit şi cum $0 \le s_n \le v_n + f(1)$, rezultă că şirul (s_n) va fi mărginit şi aplicînd lema de la începutul acestui paragraf, seria $\sum_{n\ge 1} f(n)$ rezultă C.

COROLAR. Fie $\alpha > 0$. Seria armonică generalizată

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

(numită şi seria marelui matematician german B. RIEMANN, 1826-1866) este C dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

DEMONSTRAŢIE. Se consideră funcţia $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ care îndeplineşte condiţiile teoremei II. 6. În acest caz,

$$v_n = \int_1^n f(x)\mathrm{d}(x) = \frac{1}{\alpha - 1}(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}) \text{ pentru } \alpha \ne 1$$

şi $v_n = \ln n$ pentru $\alpha = 1$ deci şirul (v_n) este convergent dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

3. Criteriul raportului şi criteriul rădăcinii

TEOREMA II.7 (criteriul raportului; J. D'ALEMBERT, 1717-1783). Fie $\sum_{n\ge 0} u_n$ o serie de numere reale sau complexe nenule şi

$$a = \underline{\lim}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|, \quad b = \overline{\lim}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| .$$

Dacă $a > 1$, atunci seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este D, iar dacă $b < 1$, seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este AC.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $a > 1$, atunci conform teoremei I.4 rezultă că de la un rang încolo avem $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, adică $|u_{n+1}| > |u_n|$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| > 0 \text{ şi ca atare, } \lim_{n\to\infty} u_n \ne 0 .$$

Conform teoremei II.1, seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este D.

Presupunem acum că $b < 1$ şi alegem v astfel încît $b < v < 1$. Conform teoremei I. 4, rezultă că există un rang N natural astfel încît $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \le v$ pentru orice $n \ge$ N. Atunci

$$|u_{N+1}| \le v|u_N|, \quad |u_{N+2}| \le v|u_{N+1}| \le v^2|u_N| \text{ şi } |u_{N+k}| \le v^k|u_N|$$

pentru orice $k \ge 0$. Seria

$$\sum_{k\ge 0} v^k|u_N| \text{ fiind C,}$$

aplicînd criteriul de comparaţie II. 4, va rezulta că seria $\sum_{k\ge 0} |u_{N+k}|$ deci şi seria $\sum_{n\ge 0} |u_n|$ este C, adică seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ este AC.

În practică se aplică în mod curent următorul

COROLAR. Presupunem că pentru seria $\sum_{n\ge 0} u_n$ de numere reale sau complexe există limita

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

Dacă $l < 1$ atunci seria este C, iar dacă $l > 1$, seria este D.

EXEMPLUL 1. Seria $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$ este C, deoarece punînd

$$u_n = \frac{1}{n!} \text{ avem } \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Suma acestei serii este egală cu e, aşa cum se ştie din liceu.

EXEMPLUL 2. Fie seria $\sum_{n\ge 1} \frac{a^n}{4n^2 - 1}$, $a \in \mathbb{C}$. Notînd $u_n = \frac{a^n}{4n^2 - 1}$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |a|.$$

Dacă $|a| < 1$ seria este C, iar dacă $|a| > 1$, seria este D. Criteriul d'Alembert

nu are forţa de a decide natura seriei în cazul cînd $|a| = 1$. De exemplu, dacă $a = 1$, atunci se poate explicita (caz fericit !) şirul numerelor parţiale sau se observă că seria are aceeaşi natură cu seria Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ deci C. În cazul $a = -1$ seria rezultă de asemenea C, aplicînd criteriul lui Leibniz.

TEOREMA II. 8 (criteriul rădăcinii; CAUCHY). Fie $\sum_{n\geq 0} u_n$ o serie numerică (în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|}$. Dacă $l < 1$ atunci seria este AC, iar dacă $l > 1$, seria este D.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $l < 1$, atunci putem alege q astfel încît $l < q < 1$. Conform teoremei I. 4, mulţimea

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt[n]{|u_n|} > q\} \text{ este finită,}$$

deci începînd de la un anumit rang, rezultă că $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q$ adică $|u_n| \leq q^n$. Cum $0 < q < 1$ şi seria $\sum_{n\geq 0} q^n$ este C, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ este C.

Dacă $l > 1$, atunci din nou aplicînd teorema I.4, rezultă că mulţimea

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt[n]{|u_n|} > 1\} \text{ este infinită,}$$

adică $|u_n| > 1$ pentru o infinitate de indici n; dar atunci şirul (u_n) nu poate converge către zero şi ca atare, seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este D.

EXEMPLU. Studiem natura seriei $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n$, $a > 0$.

Notînd cu u_n termenul general, rezultă

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{an+1}{n+2} \to a.$$

Dacă $a > 1$, seria este D şi dacă $a < 1$, este C. Pentru $a = 1$, termenul general $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ converge către $\frac{1}{e} \neq 0$, deci seria este D.

Comentariu. Dacă $l = 1$ în corolarul teoremei II. 7 sau în teorema II. 8, atunci nu se poate trage nici o concluzie. De exemplu, pentru ambele serii $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ se obţine $l = 1$, una fiind C şi alta D. În cazul $l = 1$ se poate folosi următorul criteriu datorat lui RAABE: fie o serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ de numere reale pozitive astfel încît să existe

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right);$$

dacă $L > 1$ seria este C şi dacă $L < 1$, seria este D.

4. Proprietăţi speciale ale seriilor numerice

TEOREMA II. 9 (DIRICHLET, 1805-1859). Fie o serie numerică $\sum_{n\geq 0} u_n$, presupusă AC cu suma s. Atunci pentru orice permutare a termenilor, seria nou obţinută va fi convergentă, cu aceeaşi sumă s.

DEMONSTRAŢIE. Notăm cu $\sum_{n\geq 1} u'_n$ seria obţinută prin permutarea termenilor (de fapt $u'_n = u_{\sigma(n)}$ unde $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o aplicaţie bijectivă). Fie (s_n), respectiv (s'_n) şirurile de sume parţiale în cele două serii considerate şi $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci există $N = N(\varepsilon)$ astfel încît $\forall\, m \geq n \geq N$,

$$\sum_{i=n}^{m} |u_i| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ şi } |s - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alegem M natural astfel încît pentru $m \geq M$, s'_m să conţină termenii $u_1, u_2, \ldots, u_N$ şi fie $u_{N+k_1}, \ldots, u_{N+k_m}$ ceilalţi termeni din suma s'_m. Rezultă

$$|u_{N+k_1} + \ldots + u_{N+k_m}| \leq |u_{N+k_1}| + \ldots + |u_{N+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

deci $|s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $m \geq M$. Ca atare,

$$|s - s'_m| \leq |s - s_N| + |s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ pentru orice } m \geq M \text{ deci}$$

$$\lim_{m\to\infty} s'_m = s.$$

Comentariu. Teorema II. 9 arată că seriile AC au proprietăţi similare sumelor finite.

Un rezultat oarecum neaşteptat, care deosebeşte în mod vădit seriile şi sumele finite îl constituie

TEOREMA II. 10 (RIEMANN). Fie o serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ de numere reale, C dar nu AC. Atunci pentru orice α, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ cu $\alpha \leq \beta$ există o permutare a termenilor astfel încît pentru seria nou obţinută

$$\sum_{n\geq 0} a_n', \text{ să avem } \underline{\lim}\, s_n' = \alpha \text{ şi } \overline{\lim}\, s_n' = \beta.$$

DEMONSTRAŢIE. Notăm $p_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$, $q_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$, $n \geq 0$.

Rezultă că seriile $\sum_{n\geq 1} p_n$, $\sum_{n\geq 1} q_n$ sunt D (deoarece seria $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ este D şi $\sum_{n\geq 0} a_n$ este C).

Fie $P_1, P_2,\dots$ termenii strict pozitivi din seria $\sum_{n\geq 0} a_n$, în ordinea în care apar şi $Q_1, Q_2,\dots$ modulele termenilor strict negativi, tot în ordinea în care apar. Seriile $\sum_{n\geq 0} P_n$ şi $\sum_{n\geq 0} Q_n$ se deosebesc de $\sum_{n\geq 0} p_n$, $\sum_{n\geq 0} q_n$ doar prin termenii nuli, deci ambele sunt D. Alegem $\alpha_n \to \alpha$ şi $\beta_n \to \beta$ cu $\alpha_n < \beta_n$ pentru orice $n \geq 1$ şi şirurile de numere naturale $(m_n)_{n\geq 0}$, $(k_n)_{n\geq 0}$ astfel încît:

$$P_1 + \dots + P_{m_0} > \beta_0$$

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} < \alpha_1$$

....

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} + \dots + P_{m_{n-1}} + \dots + P_{m_n} > \beta_n$$

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} + \dots + P_{m_{n-1}+1} + \dots + P_{m_n} - Q_{k_{n-1}} - \dots - Q_{k_n} < \alpha_n,$$

etc.
Considerăm acum seria

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} + \dots + P_{m_{n-1}+1} + \dots + P_{m_n} - Q_{k_{n-1}+1} + \dots + Q_{k_n} + \dots .$$

Dacă x_n este suma ei parţială care se termină cu P_{m_n} şi y_n este suma

parţială care se termină cu $-Q_{k_n}$, atunci $|x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}$ şi $|y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}$ pentru orice $n \geq 1$ natural deci $x_n \to \beta$, $y_n \to \alpha$. Alte puncte limită nu sunt şi teorema rezultă.

COROLAR. Din orice serie de numere reale C, dar nu AC şi pentru orice $t \in \overline{\mathbb{R}}$ se poate obţine prin permutarea termenilor o serie avînd ca sumă t.

TEOREMA II. 11 (MERTENS). Fie două serii $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ de numere reale sau complexe, presupuse AC (deci şi C) cu sumele s, t respectiv. Se notează:

$$w_k = u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + \dots + u_k v_0 = \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=k}} u_i v_j, \text{ pentru orice } k \geq 0.$$

Atunci seria $\sum_{k\geq 0} w_k = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \dots$ este AC şi are suma st.

DEMONSTRAŢIE. Să observăm mai întîi că pentru orice sumă finită σ de termeni de forma u_iv_j există N natural astfel încît prin înmulţirea sumelor $s_N = u_0 + u_1 + \dots + u_N$, $t_N = v_0 + v_1 + \dots + v_N$, să se obţină toţi termenii consideraţi în σ. Atunci

$$|\sigma| \leq \sum |u_iv_j| \leq \sum_{0\leq i,j\leq N} |u_iv_j| = \sum_{0\leq i,j\leq N} |u_i||v_j| =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{N} |u_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{N} |v_j|\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |u_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} |v_j|\right).$$

De aici rezultă că toate sumele parţiale ale seriei $\sum_{k\geq 0} |w_k|$ sunt mărginite deci seria $\sum_{k\geq 0} |w_k|$ este C, iar seria $\sum_{k\geq 0} w_k$ rezultă AC. Aplicînd teorema II. 9, suma seriei $\sum_{k\geq 0} w_k$ este bine determinată, indiferent de ordinea în care sunt consideraţi termenii ei; în particular, aceasta se poate obţine ca $\lim_{N\to\infty} s_N t_N = st$.

EXEMPLU. Seria $\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ este AC pentru $|q| < 1$, cu

suma $\dfrac{1}{1-q}$. Atunci

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots, \text{ pentru } |q| < 1.$$

TEOREMA II. 12 (CANTOR). Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere întregi ≥ 2. Atunci orice număr real α se poate reprezenta, în mod unic, sub forma:

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{a_1 a_2 \ldots a_i},$$

unde $c_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq c_i \leq a_i - 1$ pentru orice $i \geq 1$ şi $c_i < a_i - 1$ pentru o infinitate de indici i.

DEMONSTRAŢIE. Începem cu următoarea

LEMĂ. Avem $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i}-1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+i}} = 1$ pentru orice $n \geq 1$.

Avem $\displaystyle\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}a_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+k}-1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}}$ şi

lema rezultă, observînd că $a_j \geq 2$ pentru orice j deci $\displaystyle 0 < \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}} \leq \frac{1}{2^k}$,

şi ca atare, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}} = 0$.

Trecem la demonstraţia teoremei. Fie $c_0 = [\alpha]$ deci unicul întreg astfel încît $c_0 \leq \alpha < c_0 + 1$. Definim $\alpha_1 = \alpha - c_0$, $c_1 = [a_1\alpha_1]$, $\alpha_2 = a_1\alpha_1 - c_1$ şi prin inducţie,

$$c_i = [a_i\alpha_i], \quad \alpha_{i+1} = a_i\alpha_i - c_i \text{ pentru } i \geq 1. \tag{1}$$

De aici rezultă că

$$0 \leq \alpha_i < 1 \text{ pentru } i \geq 1, \tag{2}$$

de unde $0 \leq a_i\alpha_i < a_i$, iar din definiţia numerelor c_i, $0 \leq c_i \leq a_i - 1$.

Pe de altă parte

$$\alpha = c_0 + \alpha_1 = c_0 + \frac{c_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_1} = c_0 + \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_1a_2} + \frac{\alpha_3}{a_1a_2} = \ldots =$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_1a_2\ldots a_i} + \frac{\alpha_{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Notînd $x_n = c_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_1a_2\ldots a_i}$, rezultă $0 \leq \alpha - x_n = \dfrac{\alpha_{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n} < \dfrac{1}{2^n}$, deci $x_n \to \alpha$ şi astfel se obţine scrierea din enunţ.

Arătăm acum că pentru o infinitate de indici i avem $c_i < a_i - 1$. Dacă prin absurd există N astfel încît $c_i = a_i - 1$ pentru orice $i > N$, atunci

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{a_1\ldots a_i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a_i - 1}{a_1a_2\ldots a_i} =$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{a_1\ldots a_i} + \frac{1}{a_1a_2\ldots a_N}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{N+i}-1}{a_{N+1}\ldots a_{N+i}} =$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{a_1\ldots a_i} + \frac{1}{a_1a_2\ldots a_N},$$

conform lemei. Ca atare, rezultă că $\alpha_{N+1} = 1$, ceea ce contrazice (2).

Stabilim în fine unicitatea scrierii din enunţ. Dacă

$$\alpha = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{a_1a_2\ldots a_i}$$

cu b_i avînd proprietăţile cerute, avem de arătat că $b_i = c_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Cum $b_i < a_i - 1$ pentru o infinitate de indici, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{a_1a_2\ldots a_i} < 1,$$

conform lemei deci $b_0 = [\alpha] = c_0$. Dacă există $n \geq 1$ astfel încît $b_n \neq c_n$, să notăm cu N cel mai mic întreg cu această proprietate. Dacă am avea de exemplu $c_N > b_N$ (cazul $c_N < b_N$ se tratează similar), atunci $c_N - b_N \geq 1$ şi ar

rezultă $\displaystyle\sum_{i=N}^{\infty} \frac{c_i}{a_1\ldots a_i} = \sum_{i=N}^{\infty} \frac{b_i}{a_1\ldots a_i}$ şi cum seriile sunt AC, rezultă

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{b_i - c_i}{a_1a_2\ldots a_i} = \frac{c_N - b_N}{a_1a_2\ldots a_N} \geq \frac{1}{a_1a_2\ldots a_N}.$$

Dar pe de altă parte,

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{b_i - c_i}{a_1a_2\ldots a_i} < \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a_i - 1}{a_1a_2\ldots a_i} = \frac{1}{a_1a_2\ldots a_N}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{N+i}-1}{a_{N+1}\ldots a_{N+i}} =$$

$$= \frac{1}{a_1a_2\ldots a_N} \text{ (conform lemei);}$$

am folosit faptul că pentru o infinitate de indici i avem $b_i < a_i - 1$; contradicţie.

COROLAR. Luăm $a_n = q \ge 2$ întreg, pentru orice $n \ge 1$. Atunci orice număr real α se scrie unic sub forma

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i q^{-i}, \qquad (3)$$

unde $c_i \in \mathbb{N}$, $0 \le c_i \le q - 1$ pentru orice $i \ge 1$ şi $c_i < q - 1$ pentru o infinitate de indici i.

Se obţine astfel **reprezentarea oricărui număr real în baza** q. Demonstraţia teoremei II.12 conţine şi algoritmul de determinare a cifrelor c_i.

EXEMPLU. Pentru q = 10 se obţine scrierea poziţională **zecimală**, uzuală, a numerelor reale. De exemplu, numărul $\alpha = 38{,}487...$ este suma seriei $38 + 4.10^{-1} + 8.10^{-2} + 7.10^{-3} + ...$ Pentru q = 2 se obţine scrierea **binară**. De exemplu, $\pi = 3{,}14159...$ se scrie binar astfel:

$$\pi = 3 + 0.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} + 0.2^{-4} + 0.2^{-5} + 1.2^{-6} + ... = 11{,}001001...$$

Comentariu. Fie $q \ge 2$ întreg fixat şi $\alpha > 0$ un număr real, cu scrierea (3). În cazul **reprezentării cu virgulă fixă**, se fixează u locaţii pentru partea întreagă (presupuse suficiente) şi v locaţii pentru partea zecimală. Atunci α este înlocuit printr-o aproximare $\bar{\alpha}$, $\alpha \approx \bar{\alpha}$; eroarea absolută este

$$|\alpha - \bar{\alpha}| = c_{v+1} \cdot \frac{1}{q^{v+1}} + c_{v+2} \cdot \frac{1}{q^{v+2}} + ... \le (q-1) \cdot \left(\frac{1}{q^{v+1}} + \frac{1}{q^{v+2}} + ... \right) = \frac{1}{q^{v}}.$$

În cazul **reprezentării cu virgulă mobilă**, numărul α se scrie sub forma $\alpha = aq^b$ cu condiţia de normare $\frac{1}{q} \le a < 1$ (pentru ca mantisa a şi exponentul întreg b să fie unic determinaţi) şi se fixează u' locaţii pentru mantisă şi v' locaţii pentru exponent (pentru fiecare calculator, u, v, u', v' reprezintă o caracteristică a sa). Reprezentarea în virgulă mobilă permite o lărgire a diapazonului de numere care pot fi supuse procesului de calcul. De exemplu, fie q = 10, $u = 3$, $v = 2$, $u' = 7$, $v' = 2$. Dacă $\alpha = 23{,}7564389$, atunci reprezentarea cu virgulă fixă corespunzătoare este $\bar{\alpha} = 23{,}75$ iar reprezentarea cu virgulă mobilă este $\bar{\alpha} = 0{,}23756 \cdot 10^2$. Dar pentru $\alpha = 300.000$, reprezentarea cu virgulă fixă nu este posibilă; scriind $\alpha = 0{,}3 \cdot 10^6$ este suficient un registru cu $u' = 2$, $v' = 2$; la fel pentru constanta lui PLANCK $h = 0{,}6.10^{-33}$ Js.

5. Calculul aproximativ al sumelor de serii

Fie o serie convergentă de numere reale $\sum_{n \ge 0} a_n$ avînd suma s necunoscută.

Pentru calculul lui s se recomandă desigur formula aproximativă $s \approx s_n$, unde $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$, fiind utilă şi necesară o evaluare a erorii absolute $|s - s_n|$. Indicăm două cazuri elementare unde aceasta se poate realiza.

a) Presupunem că există $N \ge 1$ întreg şi $k \in (0,1)$ astfel încît $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le k$ $\forall n \ge N$. Atunci $\forall n \ge N$, $|a_{n+1}| \le k|a_n|$, $|a_{n+2}| \le k|a_{n+1}| \le k^2|a_n|$,... şi notînd cu r_n suma seriei $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ (numită şi **restul** de ordin n al seriei iniţiale), avem $s = s_n + r_n$ deci

$$|s - s_n| = |r_n| \le |a_n| (k + k^2 + k^3 + ...) = |a_n| \frac{k}{1-k}.$$

Dacă se cere să calculăm s cu aproximaţie ε($\varepsilon > 0$ dat), atunci se determină M natural minim astfel încît $M \ge N$ şi $|a_n| \frac{k}{1-k} \le \varepsilon$ pentru $n \ge M$, aplicînd formula aproximativă $s \approx a_0 + a_1 + ... + a_M$.

EXEMPLU. Calculăm suma seriei $\sum_{n \ge 1} \frac{2n+1}{n^3 n!}$ cu aproximaţie 10^{-3}. În acest caz,

$$a_n = \frac{2n+1}{n^3 n!} \text{ deci } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)n^3}{(n+1)^4(2n+1)}; \text{ se observă că } \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{1}{n+2}.$$

Deci pentru $n \ge 4$ avem $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \frac{1}{6}$ şi putem lua $N = 4$, $k = \frac{1}{6}$. Pe de altă parte, inegalitatea $|a_n| \frac{k}{1-k} \le 10^{-3}$ revine la $\frac{2n+1}{n^3 n!} \frac{1}{5} < \frac{1}{1000}$ şi are loc pentru $n \ge 5$ şi ca atare putem lua $M = 5$. Deci suma căutată este

$$s \approx s_5 = \frac{3}{1^3 1!} + \frac{5}{2^3 2!} + \frac{7}{3^3 3!} + \frac{9}{4^3 4!} + \frac{11}{5^3 5!} \approx 3{,}362.$$

b) Presupunem că $(a_n)_{n \ge 0}$ este un şir astfel încît $a_n \downarrow 0$. Conform criteriului lui LEIBNIZ, seria alternantă $\sum_{k \ge 0} (-1)^k a^k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ...$ este

C; fie s suma ei şi $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k = s - s_n$. Vom arăta că $|r_n| \le a_{n+1}$ pentru orice $n \ge 0$ [într-adevăr, se observă că $\forall\, k \ge 1$, $n \ge 0$, $a_{n+1} - a_{n+2} \le a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + (-1)^{k+1} a_{n+k} + (-1)^k a_{n+k+1} \le a_{n+1}$ şi făcînd $k \to \infty$, $a_{n+1} - a_{n+2} \le (-1)^{n+1} r_n \le a_{n+1}$ deci $|r_n| \le a_{n+1}$ pentru orice $n \ge 0$].

Aşadar, aproximînd s cu suma parţială s_n, eroarea absolută este egală cu cel mult modulul primului termen omis.

EXEMPLU. Calculăm suma s a seriei alternate $1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \ldots$ cu eroare 10^{-4}. Aici $a_n = \frac{1}{(2n+1)^4}$ şi alegem $n \ge 1$ minim astfel încît $a_{n+1} \le \frac{1}{10^4}$ adică $(2n+3)^4 \ge 10^4$; se găseşte $n = 4$. Atunci $s \approx s_4 = 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} \approx 0{,}98883$.

6. 10 exerciţii

1. Să se arate, explicitînd s_n, că seriile următoare sunt D:

$$\text{a) } \sum_{n\ge 0} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n});\quad \text{b) } \sum_{n\ge 1} \ln\frac{n+2}{n}.$$

2. Să se calculeze sumele următoare:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)};\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1};\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{n!}.$$

3. Fie $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \ge 2$.

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, dar seriile $\sum_{n\ge 2} a_n$, $\sum_{n\ge 2} b_n$ nu au aceeaşi natură; se contravine astfel teoremei II. 5 ?

4. Fie $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $n \ge 2$. Să se arate că $a_n \to 0$, totuşi seria alternată $a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$ este D. Se contravine criteriului lui LEIBNIZ ?

5. 1^0. Folosind criteriul lui D'ALEMBERT, să se studieze natura seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n\ge 1} 2^{-\sqrt{n^2+3}};\ \text{b) } \sum_{n\ge 1} \frac{n!}{n^n};\ \text{c) } \sum_{n\ge 1} \frac{\alpha^n}{n}\ (\alpha \in \mathbb{R});\ \text{d) } \sum_{n\ge 0} \frac{\alpha^n}{n!}\ (\alpha \in \mathbb{C}).$$

2^0. Aplicînd criteriul rădăcinii, să se studieze natura seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n\ge 1} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n^2};\ \text{b) } \sum_{n\ge 1} (3 + (-1)^n)^n \alpha^n \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

6. Să se arate că pentru orice şir $a_n > 0$, avem $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

7. Să se arate că seriile $\sum_{n\ge 1} \frac{\sin n}{n^2}$ şi $\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^3}$ sunt AC.

8. Să se dea exemplu de o serie $\sum_{n\ge 1} a_n$ D astfel încît $\sum_{n\ge 1} a_n^2$ să fie C şi de o serie $\sum_{n\ge 1} b_n$ C astfel încît $\sum_{n\ge 1} b_n^2$ să fie D.

9. Să se scrie în baza 2 numerele 100; e; $\alpha = 25{,}43$ indicînd primele 4 cifre binare de după virgulă.

10. Fie $a_{mn} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n - \frac{1}{m+2}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^n$ pentru $m \ge 1$, $n \ge 1$ întregi.

Să se arate că

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right) \ne \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right).$$

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI.

1. a) $s_n = \sqrt[3]{n+1} \to \infty$; b) $s_n = \ln(n+2) \to \infty$.

Deci şirul (s_n) nu este convergent (deşi are limită).

2. Descompunem termenul general în "fracţii simple"

a) $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ $\quad s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{3}{4}$;

b) $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$, $\quad s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}$.

c) Se ştie că

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)+3n+5}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + 3e + 5(e-1) = 9e - 5.$$

3. Seria $\sum_{n \geq 2} b_n$ este C, conform criteriului lui LEIBNIZ; apoi seria $\sum_{n \geq 2} (b_n - a_n)$ este D deci seria $\sum_{n \geq 2} a_n$ este D. Nu se contravine teoremei II. 5 pentru că a_n şi b_n nu sunt numere pozitive. Deci condiţia de pozitivitate în enunţul teoremei II. 5 este esenţială.

4. Şirul a_n nu este monoton descrescător.

5. 1^0. a) C;

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{e} < 1$ deci seria este C;

c) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to |\alpha|$. Deci dacă $|\alpha| < 1$, atunci seria este C; dacă $|\alpha| > 1$ seria este D; dacă $\alpha = 1$ seria este D şi dacă $\alpha = -1$ seria este C, fiind seria armonică alternată;

d) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|\alpha|}{n+1} \to 0$ deci seria este AC pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$.

2^0. a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ şi seria este C;

b) $\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim}(3 + (-1)^n)|\alpha| = 3|\alpha|$. Dacă $|\alpha| < \frac{1}{3}$ seria este C şi dacă $|\alpha| > \frac{1}{3}$, seria este D. Dacă $\alpha = \pm\frac{1}{3}$, seria este D deoarece termenul general nu tinde către zero.

6. Să demonstrăm inegalitatea $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Fie $a = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; dacă $a = +\infty$ atunci evident $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq a$. Dacă $a < +\infty$, fie $b > a$; avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b$ pentru $n \geq N$; deducem $a_{N+p} \leq b^p a_N$ $\forall p > 0$, de unde $a_n \leq a_N b^{-N} b^n$, $n \geq N$ şi deci $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_N b^{-N}} \cdot b$, de unde $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq b$, $\forall b > a$ deci $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq a$ etc.

7. Avem $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ şi $\left|\frac{(-1)^n(n+1)}{n^3}\right| \leq \frac{2}{n^2}$ şi se aplică teorema II.4.

8. Putem lua $a_n = \frac{1}{n}$; $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

9. $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 1100100$;
$e \approx 2{,}7182818 \approx 1.2^1 + 0.2^0 + 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} + 1.2^{-4} + \ldots \approx \overline{10{,}1011}$;
$\alpha = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} + 1.2^{-3} + 0.2^{-4} + \ldots \approx \overline{11001{,}0110}$.

10. Pentru orice $m \geq 1$ fixat, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n - \frac{1}{m+2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^n = \frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m+2} \text{ deci}$$

$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m+2}\right) = -\frac{1}{2}$; pe de altă parte, $\forall n \geq 1$, fixat, notînd $b_m = \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$, avem $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1} (b_m - b_{m+1}) = b_1 = \frac{1}{2^{n+1}}$ şi ca atare, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

În general, pentru un şir dublu **finit** de numere reale sau complexe (a_{mn}) avem $\sum_m \sum_n a_{mn} = \sum_n \sum_m a_{mn}$, dar pentru serii acest rezultat nu are loc, aşa cum ne arată exerciţiul. Se poate arăta că are totuşi loc pentru serii duble absolut convergente, în analogie cu teorema II. 9.

ANEXĂ LA LECŢIA A II-A

Semnale discrete

Se numeşte **mulţime-timp** orice mulţime $\mathfrak{T}$ pe care este definită o relaţie de ordine totală "$\leq$"; elementele lui $\mathfrak{T}$ se numesc **momente.**

EXEMPLE. În cazul $\mathfrak{T} = \mathbb{N} = \{0,1,2\ldots\}$ sau $\mathfrak{T} \subset \mathbb{Z}$, se spune că timpul este **discret.** Dacă $\mathfrak{T}$ este un interval, se spune că timpul este **continuu** (sau mai corect, **continual**). Dacă $\mathfrak{T} = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$ este o mulţime finită de momente, se spune că avem un **timp finit.**

Dacă $\mathfrak{T}$ este o mulţime-timp, orice funcţie $f: \mathfrak{T} \to \mathbb{C}$ se numeşte **semnal**; pentru orice $t \in \mathfrak{T}$, numărul $f(t)$ se numeşte eşantionul lui f la momentul t. Se pot considera semnale **discrete, continuale** sau **finite,** după tipul mulţimii de momente. Definiţia

anterioară este totuşi restrictivă, deoarece nu cuprinde cazul impulsurilor, al semnalelor aleatoare sau al semnalelor multidimensionale (imagini).

EXEMPLUL 1. **Treapta unitate**

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t < 0 \\ 1 & \text{dacă } t \geq 0 \end{cases}$$

(notată cu h după numele inginerului englez O. HEAVISIDE, 1850 - 1925) şi **funcţia de eşantionare**

$$sa: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad sa(t) = \begin{cases} (\sin t)/t & \text{dacă } t \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$$

sunt exemple de semnale continuale.

EXEMPLUL 2. Orice semnal discret $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ se identifică prin şirul $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ al eşantioanelor sale. **Treapta unitate discretă** u este definită prin $u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$.

Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, **impulsul discret unitar la momentul** k este semnalul discret δ_k definit prin

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases};\ \text{se notează } \delta = \delta_0.$$

Vom nota cu S_d mulţimea semnalelor discrete $s = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ cu $x_n \in \mathbb{C}$. Dacă $t = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in S_d$, definim $s = t \Leftrightarrow x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{Z}$; $s + t = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ şi $\lambda s = (\lambda x_n)_{n \in Z}$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$. Semnalul **nul** are toate eşantioanele nule. Se consideră următoarele clase particulare de semnale discrete:

$S_+ = \{s = (x_n)_{n \in Z} \mid x_n = 0 \text{ pentru orice } n < 0\}$ (semnale **cu suport pozitiv**);

$$l_1 = \left\{ s \in S_+ \mid \text{ seria } \sum_{n \geq 0} |x_n| \text{ este } C \right\};\ l_2 = \left\{ s \in S_+ \mid \text{ seria } \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 \text{ este } C \right\}.$$

TEOREMĂ. Mulţimile S_d, S_+, l_1 şi l_2 sunt spaţii vectoriale peste $\mathbb{C}$, relativ la operaţiile $s + t$, λs $(\lambda \in \mathbb{C})$. Totodată au loc incluziunile $l_1 \subset l_2 \subset S_+ \subset S_d$.

DEMONSTRAŢIE. Faptul că S_d este $\mathbb{C}$ – spaţiu vectorial rezultă direct din definiţia noţiunii de spaţiu vectorial. Apoi aplicăm criteriul subspaţiului. Dacă $s,t \in S_+$, evident $s + t$ şi λs aparţin la S_+, deci S_+ este un subspaţiu al lui S_d. Apoi dacă $s = (x_n)_{n\geq 0}$ şi $t = (y_n)_{n \geq 0}$ aparţin la l_1, atunci aplicînd inegalităţile $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$ şi criteriul comparaţiei, rezultă că seria $\sum_{n \geq 0} |x_n + y_n|$ este C deci $s + t \in l$; evident, $\lambda s \in l_1$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ deci l_1 este subspaţiu al lui S_d.

Să presupunem acum că $s,t \in l_2$. Din inegalitatea $(|x_n| - |y_n|)^2 \geq 0$, rezultă că

$|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ deci seria $\sum_{n \geq 0} |x_n y_n|$ este C şi cum $|x_n + y_n|^2 = |(x_n + y_n)^2| \leq |x_n^2| + 2|x_n y_n| + |y_n|^2$, rezultă că seria $\sum_{n \geq 0} |x_n + y_n|^2$ este C, adică $s + t \in l_2$. Dacă $s \in l_2$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci evident $\lambda s \in l_2$. A rămas de dovedit incluziunea $l_1 \subset l_2$; într-adevăr, dacă $s \in l_1$, $s = (x_n)$, atunci $x_n \to 0$ deci şirul este mărginit deci $\exists M > 0$, $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \geq 0$. Atunci $|x_n|^2 \leq M\ |x_n|$ deci seria $\sum_{n \geq 0} |x_n|^2$ este C şi ca atare $s \in l_2$.

Comentariu. Spaţiul l_2 este generalizarea directă infinit dimensională a spaţiului $\mathbb{R}^n$; punctul $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se identifică prin semnalul $s = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..., 0)$ care aparţine lui l_2. Semnalele $s = (x_n)_{n \geq 0}$ din l_2 se mai numesc semnale **de energie finită**; numărul real şi pozitiv $\|s\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$ se numeşte **energia** lui s. Dacă $s,t \in l_2$, $s = (x_n)$, $t = (y_n)$, atunci se defineşte **produsul scalar**:

$$<s,t> = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Inegalitatea $|x_n \overline{y_n}| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ arată că seria din membrul drept este AC deci C.

O operaţie importantă o constituie cea de convoluţie.

Definiţie. Dacă $s = (x_n)_{n\geq 0}$ şi $t = (y_n)_{n\geq 0}$ sunt semnale din S_+, atunci se notează $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + ... + x_n y_0$, pentru orice $n \geq 0$; semnalul $s * t = (z_n)_{n\geq 0}$ se numeşte **convoluţia** semnalelor s şi t. Convoluţia se poate defini şi dacă $x,y \in S_d$, în ipoteza că seriile $z_n = \sum_{k \in Z} x_k y_{n-k}$ sunt C, $\forall n \in Z$.

Proprietăţile principale ale convoluţiei sunt următoarele:

a) Dacă se consideră seriile formale

$\sum_{n\geq 0} x_n u^n = x_0 + x_1 u + x_2 u^2 + ...$, $\sum_{n \geq 0} y_n u^n = y_0 + y_1 u + y_2 u^2 + ...$ asociate lui s şi t respectiv, atunci produsul acestor serii va fi

$$\left(\sum_{n \geq 0} x_n u^n\right)\left(\sum_{n \geq 0} y_n u^n\right) = x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0)u + (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0)u^2 + ... =$$

$= z_0 + z_1 u + z_2 u^2 + ...$ şi aceasta este tocmai seria formală asociată convoluţiei $s * t$.

b) Pentru orice $s \in S_+$ avem $\delta * s = s$ şi $s * \delta = s$.

c) Mulţimea S_+ este un inel comutativ relativ la operaţiile $s + t$, $s * t$ cu elementele neutre 0 şi respectiv δ.

d) Pentru orice semnal $x = (x_n)_{n \in Z}$ şi pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, semnalul $x * \delta_k$ are eşantioanele $(x_{n-k})_{n \in Z}$ şi se numeşte **întîrziatul** lui x cu k paşi.

LECȚIA A III-A

SPAȚII METRICE, APLICAȚII CONTINUE

INTRODUCERE

Scopul acestui capitol este acela de a studia conceptul de continuitate într-un cadru natural și suficient de general. Reamintim că o funcție reală $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) este continuă într-un punct $a \in A$ dacă pentru orice șir $x_n \to a$ ($x_n \in A$), rezultă $f(x_n) \to f(a)$. Pentru extinderea la funcții mai generale, este necesară extinderea ideii de "apropiere", de convergență și un pas important îl constituie introducerea noțiunii de distanță și implicit de spațiu metric. Cele mai întîlnite mulțimi care apar în Analiza matematică sunt submulțimi ale unor spații metrice; astfel , vom vedea că dreapta reală $\mathbb{R}$, planul complex $\mathbb{C}$, spațiul $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), mulțimea funcțiilor mărginite $A \to \mathbb{R}$ sunt în mod natural spații metrice. În loc de a face o teorie separată pentru fiecare caz în parte, vom stabili o serie de proprietăți generale, valabile în orice spațiu metric și apoi vom adăuga proprietăți suplimentare, specifice unor situații particulare.

Noțiunea de spațiu metric este datorată matematicianului francez M. FRÉCHET (1878 – 1973) și astăzi putem vorbi de distanță nu numai între puncte sau numere, dar și între funcții, între matrice etc. și s-a putut degaja o teorie sistematică a convergenței șirurilor și a aproximațiilor succesive.

1. Distanță, convergență. Principiul contracției.

Definiția III. 1. Fie X o mulțime nevidă. Se numește **distanță pe** X orice funcție $d : X \times X \to \mathbb{R}$ astfel încît:

D_1 $\forall\, x,y \in X$, $d(x,y) \geq 0$ și $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

D_2 $\forall\, x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$;

D_3 Pentru orice $x,y,z \in X$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

adică au loc proprietățile de pozitivitate, simetrie și inegalitatea triunghiului. Perechea (X,d) se numește **spațiu metric** și elementele lui X se numesc **puncte**.

Comentariu. Așadar, oricărei perechi x,y de puncte din X i se asociază un număr real pozitiv sau nul bine determinat, $d(x,y)$, numit distanța între x și y. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, atunci prin inducție după n rezultă că:

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots + d(x_{n-1},x_n).$$

Pe o aceeași mulțime X pot fi definite în general mai multe distanțe, deci mai multe structuri de spațiu metric. Atunci cînd nu este pericol de confuzie (adică distanța este subînțeleasă), spațiul metric (X,d) va fi notat pur și simplu cu X.

EXEMPLUL 1. $X = \mathbb{R}$ cu distanța euclidiană uzuală $d(x,y) = |x - y|$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ este un spațiu metric. Doar în cazuri speciale, precizate în mod expres, se vor utiliza și alte distanțe (de exemplu, $d(x,y) = 2|x - y|$) pe $\mathbb{R}$.

EXEMPLUL 2. $X = \mathbb{C}$ este un spațiu metric relativ la distanța euclidiană

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|,\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

EXEMPLUL 3. Fie $X = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ fixat); pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ se definește **distanța euclidiană** $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$. Verificarea proprietăților D_1, D_2 este imediată, iar pentru D_3 se aplică inegalitatea

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2};\ u_i, v_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}$$

care la rîndul ei rezultă imediat din inegalitatea lui Cauchy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right).$$

În lipsa unor precizări speciale, vom subînțelege că pe $\mathbb{R}^n$ este considerată distanța euclidiană. Remarcăm că spațiile metrice $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{C}$ sunt identice. O matrice din $M_{m,n}(\mathbb{R})$ se poate identifica natural cu un punct din $\mathbb{R}^{mn}$ astfel că mulțimea matricilor $m \times n$ este un spațiu metric.

EXEMPLUL 4. Orice mulțime nevidă X are o structură de spațiu metric. Anume, definim $\forall\, x,y \in X$, distanța

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y \end{cases}.$$

Se verifică ușor D_1, D_2, D_3; un astfel de spațiu metric se numește **discret**.

EXEMPLUL 5. Fie (Y,d) un spațiu metric și $X \subset Y$ o submulțime nevidă. Atunci distanța d restrînsă la X (de fapt la $X \times X$) se numește distanță **indusă** pe X. Astfel, orice submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ este un spațiu metric. De exemplu, gîndind că $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (prin identificarea punctului $(x_1,\ldots,x_n)$ cu $(x_1,\ldots,x_n,0)$), distanța euclidiană pe $\mathbb{R}^{n+1}$ induce distanța euclidiană pe $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLUL 6. Fie A o submulţime nevidă şi $X = \mathcal{M}(A)$ mulţimea funcţiilor mărginite $f : A \to \mathbb{R}$ (adică mulţimea $f(A)$ este mărginită sau echivalent, $\exists\, M > 0$ astfel încît $\forall x \in A,\ |f(x)| \le M$). Pentru orice $f,g \in X$ definim $d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$. Proprietăţile D_1, D_2 sunt evidente; apoi, dacă $f,g,h \in X$, atunci

$$\forall x \in A,\ |f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \le d(f,h) + d(g,h).$$

Rezultă că $d(f,g) \le d(f,h) + d(g,h)$ deci D_3. Distanţa "sup" astfel definită este numită **distanţa convergenţei uniforme** (justificarea terminologiei va fi dată ulterior). Distanţa $d(f,g)$ reprezintă lungimea cea mai mare a "segmentelor" care unesc punctele $(x,f(x))$ şi $(x,g(x))$, $x \in A$.

EXEMPLUL 7. Un exemplu insolit îl constituie hipercubul. Fie $\mathbf{B} = \{0,1\}$ codul binar. Pentru $u,v \in \mathbf{B}$, notăm $\delta(u,v) = 1$ dacă $u \ne v$ şi $\delta(u,v) = 0$ dacă $u = v$. Evident $\mathbf{B}^2$ are patru elemente, care pot fi asimilate cu vîrfurile unui pătrat, iar $\mathbf{B}^3$ are 8 elemente – vîrfuri ale unui cub. Mulţimea $X = \mathbf{B}^n$ are 2^n elemente şi se numeşte **hipercub** de dimensiune n. Pentru orice $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ din $\mathbf{B}^n$, se defineşte $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i,y_i)$, numărul acelor i, $1 \le i \le n$ astfel încît $x_i \ne y_i$ (numit şi numărul de necoincidenţe în şirurile x şi y). Proprietăţile D_1 şi D_2 sunt evidente; apoi, $\forall x,y,z \in \mathbf{B}$ avem $\delta(x_i,z_i) \le \delta(x_i,y_i) + \delta(y_i,z_i)$ pentru $i = \overline{1,n}$ şi însumînd, rezultă $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ deci D_3. Distanţa d se numeşte **distanţa Hamming** p[e] hipercub. Fiecare vîrf v al hipercubului este unit cu vîrfurile aflate la distanţă Hamming 1, deci care diferă de v prin cel mult un bit. Hipercubul $\mathbf{B}^n$ este î[n] corespondenţă bijectivă cu mulţimea de numere naturale $A_n = \{0,1,2,\dots,2^n-1\}$. Orice număr $x \in A_n$ are o reprezentare unică în baza 2, de form[a]

$$x = \sum_{p=1}^{n} a_p \cdot 2^{p-1}$$ cu $a_p \in \mathbf{B}$ şi poate fi identificat cu punctul $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in$ ...

Comentariu. Am spus că elementele unui spaţiu metric se mai numesc puncte şi de[...] în anumite situaţii, funcţiile, matricele, şirurile de biţi etc. pot fi considerate ca punct[e]. Cea mai importantă disponibilitate a spaţiilor metrice o constituie posibilitatea de a defini convergenţa şirurilor de puncte.

Definiţia III. 2. Fie (X,d) un spaţiu metric. Un şir $(x_n)_{n \ge 0}$ de puncte din X ar[e] **limita** x (sau este **convergent către** $x \in X$) dacă $d(x_n,x) \to 0$, adi[că] $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încît $n \ge N(\varepsilon)$ să implice $d(x_n,x) < \varepsilon$; se m[ai] scrie $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$. Şirul (x_n) se numeşte **şir Cauchy** dacă $\forall\, \varepsilon >$ [0] $\exists\, N(\varepsilon)$ astfel încît $\forall\, m,n \ge N(\varepsilon)$, $d(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Orice şir convergent are limită **unică**. Într-adevăr, dacă $x_n \to x$ şi $x_n \to x'$ în X, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang de la care începînd avem simultan $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(x_n,x') < \frac{\varepsilon}{2}$ deci $d(x,x') \le d(x,x_n) + d(x_n,x') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $0 \le d(x,x') < \varepsilon$; ca atare, $d(x,x') = 0$ şi $x = x'$.

EXEMPLUL 1. Şirul $x_n = \left(\frac{2n+1}{n}, \frac{1}{n}, 3^{-n}\right)$, $n \ge 1$, converge în $\mathbb{R}^3$ către $x = (2,0,0)$, deoarece $d(x_n,x) = \left[\left(\frac{2n+1}{n} - 2\right)^2 + \frac{1}{n^2} + 3^{-2n}\right]^{1/2} \to 0$.

EXEMPLUL 2. Pentru şirul de funcţii $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x+n}{n+1}$ şi pentru funcţia constantă $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ avem

$$d(f_n,f) = \sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-1,1]} \left|\frac{x+n}{n+1} - 1\right| = \sup_{x \in [-1,1]} \frac{|x-1|}{n+1} = \frac{2}{n+1};$$

aşadar $f_n \to f$ în spaţiul metric $\mathcal{M}([-1,1])$ al funcţiilor reale mărginite pe intervalul $[-1,1]$.

EXEMPLUL 3. Într-un spaţiu discret, un şir este convergent dacă şi numai dacă el este constant de la un anumit rang (într-adevăr, dacă $x_n \to x$, atunci există N natural astfel încît $\forall\, n \ge N$ $d(x_n,x) < 1/2$, deci $d(x_n,x) = 0$ adică $x_n = x$ pentru orice $n \ge N$).

EXEMPLUL 4. Un şir $(x_n)_{n \ge 0}$ de puncte în $\mathbb{R}^p$, $p \ge 1$, $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$ este convergent către un punct $a = (a_1,a_2,\dots,a_p)$ dacă şi numai dacă cele p şiruri componente sunt convergente, anume $x_n^1 \to a_1$, $x_n^2 \to a_2$, ..., $x_n^p \to a_p$ (în $\mathbb{R}$). Este suficient de observat că $|x_n^k - a_k| \le d(x_n,a)$ pentru orice $1 \le k \le p$, că $d(x_n,a) \le \sum_{k=1}^{p} |x_n^k - a_k|$ şi de aplicat lema cleştelui. Aşadar,

$$\lim_{n \to \infty} (x_n^1, \dots, x_n^p) = (\lim_{n \to \infty} x_n^1, \dots, \lim_{n \to \infty} x_n^p)$$

adică limita şirurilor în $\mathbb{R}^p$ se face pe componente.

Revenim la cazul general şi fie (X,d) un spaţiu metric. Se demonstrează imediat că orice şir convergent $x_n \to x$ este un şir Cauchy, deoarece $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$, $d(x_m,x_n) \le d(x_m,x) + d(x_n,x)$ şi se aplică definiţiile.

Definiţia III. 3. Spaţiul metric X se numeşte **complet** dacă orice şir Cauchy este convergent (în X).

EXEMPLUL 1. $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt spaţii metrice complete, conform criteriului general al lui Cauchy (teorema I.3.). De asemenea, pentru orice numere reale $a < b$, intervalele $(-\infty,a]$, $[a,b]$, $[a,\infty)$ sunt spaţii metrice complete.

EXEMPLUL 2. Orice spaţiu metric discret este complet (căci orice şir Cauchy este constant de la un rang încolo, deci convergent).

EXEMPLUL 3. Dar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nu este un spaţiu metric complet, cu distanţa indusă. Pentru a dovedi acest lucru, este suficient un contraexemplu; să considerăm un şir $(x_n)_{n \ge 0}$ în $\mathbb{Q}$ convergent în $\mathbb{R}$ către $\sqrt{2}$. (x_n) este un şir Cauchy în $\mathbb{R}$ deci este un şir Cauchy în $\mathbb{Q}$. Dacă $\mathbb{Q}$ ar fi complet, ar rezulta că $x_n \to \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{Q}$. Din unicitatea limitei ar rezulta că $\alpha = \sqrt{2}$ deci $\sqrt{2}$ ar fi raţional; contradicţie. Aşadar, în $\mathbb{Q}$ şirurile Cauchy nu rezultă convergente în general.

Comentariu. Se poate arăta că orice spaţiu metric X se poate "completa", în sensul că există un spaţiu metric complet minimal într-un anumit sens $\tilde{X}$ şi o aplicaţie injectivă $f : X \to \tilde{X}$, astfel încît pentru orice şir Cauchy (x_n) în X, şirul $(f(x_n))$ este convergent în $\tilde{X}$. De exemplu, pentru $X = \mathbb{Q}$ se poate lua $\tilde{X} = \mathbb{R}$.

Teorema următoare furnizează exemple importante de spaţii metrice complete.

TEOREMA III. 1.
a) Spaţiul $\mathbb{R}^p$ ($p \ge 1$ fixat) este complet, relativ la distanţa euclidiană;
b) Pentru orice mulţime A, mulţimea $\mathcal{M}(A)$ a funcţiilor mărginite $A \to \mathbb{R}$ este un spaţiu metric complet, relativ la distanţa "sup".

DEMONSTRAŢIE. a) Am văzut că un şir $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$ de puncte în $\mathbb{R}^p$ este convergent dacă şi numai dacă cele p şiruri componente sunt convergente în $\mathbb{R}$. Din inegalităţile evidente

$$|x_m^k - x_n^k| \le d(x_m,x_n),\ k = \overline{1,p} \text{ şi } d(x_m,x_n) \le \sum_{k=1}^{p} |x_m^k - x_n^k|$$

valabile pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, rezultă că şirul (x_n) este Cauchy în $\mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă cele p şiruri componente sunt Cauchy în $\mathbb{R}$. De aici şi folosind teorema I. 3., rezultă că orice şir Cauchy în $\mathbb{R}^p$ este convergent.

b) Fie $(f_n)_{n \ge 0}$ un şir Cauchy în $\mathcal{M}(A)$. Deoarece $\forall\, x \in A$, $|f_m(x) - f_n(x)| \le d(f_m,f_n)$, rezultă că şirul de numere reale $(f_n(x))$ este Cauchy; ca atare, acest şir va converge către un număr real, depinzînd de x, pe care îl notăm cu $g(x)$. Astfel este bine definită o funcţie $g : A \to \mathbb{R}$. Vom arăta că g este mărginită şi că $f_n \to g$ în $\mathcal{M}(A)$. Deoarece $(f_n)_{n \ge 0}$ este şir Cauchy rezultă că $\exists\, N(\varepsilon) = N$ natural astfel încît $\forall\, n \ge N$, $\forall\, p \ge 1$, $d(f_{n+p},f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$; luînd $n = N$, avem $d(f_{N+p},f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ deci $\forall\, x \in A$, $\forall\, p \ge 1$, $|f_{N+p}(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Făcînd $p \to \infty$ şi ţinînd cont că $f_{N+p}(x) \to g(x)$, rezultă că $\forall\, x \in A$, $|g(x) - f_N(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ deci $|g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + |f_N(x)|$. Deoarece f_N este o funcţie mărginită, rezultă că g este mărginită, adică $g \in \mathcal{M}(A)$. Din relaţia $d(f_{n+p},f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n \ge N$, rezultă că $\forall\, x \in A$, $\forall\, n \ge N$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi făcînd $p \to \infty$, rezultă $|g(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$, deci $d(f_n,g) < \varepsilon$ pentru orice $n \ge N$, adică $f_n \to g$ în $\mathcal{M}(A)$.

Un rezultat interesant şi important este cuprins în următoarea teoremă, numită şi **principiul contracţiei**, datorat matematicianului polonez ST. BANACH (1892 – 1945).

TEOREMA III. 2. (Banach). Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $\varphi : X \to X$ o aplicaţie cu proprietatea că există o constantă $k \in [0,1)$ astfel încît $\forall\, x,y \in X$, $d(\varphi(x),\varphi(y)) \le k d(x,y)$. Atunci există şi este unic un punct $\xi \in X$ astfel încît $\varphi(\xi) = \xi$.

DEMONSTRAŢIE. Fixăm un punct $x_0 \in X$ şi definim

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ \ldots$$

Se obţine astfel un şir $(x_n)_{n \ge 0}$ în X şi vom arăta că este un şir Cauchy. Mai întîi se observă că

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(\varphi(x_{n-1}),\varphi(x_n)) \le k d(x_{n-1},x_n) \le k^2 d(x_{n-2},x_{n-1}) \le \ldots \le k^n d(x_0,x_1)$$

pentru orice $n \ge 0$; atunci $\forall\, p \ge 1$, punînd $\delta = d(x_0,x_1)$, rezultă că

$$d(x_n,x_{n+p}) \le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \le$$

$$\leq k^n\delta + k^{n+1}\delta + \ldots + k^{n+p-1}\delta = k^n\delta\frac{1-k^p}{1-k} \leq k^n\frac{\delta}{1-k}.$$

Deoarece $0 \leq k < 1$, rezultă $k^n \to 0$ deci şirul (x_n) este Cauchy. Cum X este presupus complet, rezultă că $\exists\, \xi \in X$ astfel încît $x_n \to \xi$. Deoarece $0 \leq d(\varphi(x_n),\varphi(\xi)) \leq kd(x_n,\xi)$, aplicînd lema cleştelui va rezulta că $\varphi(x_n) \to \varphi(\xi)$, adică $x_{n+1} \to \varphi(\xi)$. Deoarece $x_{n+1} \to \xi$, din unicitatea limitei unui şir convergent rezultă $\varphi(\xi) = \xi$. Unicitatea unui astfel de punct se demonstrează astfel: dacă $\xi' \in X$ şi $\varphi(\xi') = \xi'$, atunci $d(\xi,\xi') = d(\varphi(\xi),\varphi(\xi')) \leq kd(\xi,\xi')$ şi cum $k < 1$, rezultă $d(\xi,\xi') = 0$ şi ca atare $\xi = \xi'$.

Comentariu. O aplicaţie $\varphi : X \to X$ ca în enunţ se mai numeşte **contracţie** a spaţiului X, de coeficient k; un punct $\xi \in X$ astfel încît $\varphi(\xi) = \xi$ se numeşte un **punct fix** al lui φ. Atunci principiul contracţiei se mai enunţă pe scurt astfel: **orice contracţie a unui spaţiu metric complet are un punct fix şi acesta este unic**. Termenul de contracţie este legat de micşorarea distanţelor, anume distanţa dintre imaginile $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ este mai mică decît distanţa între x şi y, oricare ar fi punctele x,y din X. Teorema III. 2 se mai numeşte "o teoremă de punct fix". Metoda de demonstraţie folosită pentru a determina punctul fix ξ al lui φ, soluţie a ecuaţiei $\varphi(x) = x$, poartă numele de **metoda aproximaţiilor succesive** (ale lui ξ); prima aproximaţie, x_0, este aleasă arbitrar, apoi $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$ etc. şi acest şir de aproximaţii converge către ξ. În aplicarea practică a teoremei III. 2 este necesar de evidenţiat o pereche (X,φ) asociată în mod corespunzător ecuaţiei de plecare.

COROLAR. În condiţiile teoremei III. 2, pentru orice $n > 0$ are loc inegalitatea

$$d(x_n,\xi) \leq \frac{k^n}{1-k}d(x_0,x_1).$$

DEMONSTRAŢIE. În cursul demonstraţiei teoremei am văzut că pentru orice $n \geq 0$, $p \geq 1$, avem $d(x_n,x_{n+p}) \leq \frac{k^n\delta}{1-k}$ şi facem $p \to \infty$.

Aşadar, pentru aproximarea $\xi \approx x_N$, inegalitatea anterioară permite o estimare a erorii absolute $d(\xi,x_N)$. De exemplu, dacă se doreşte calculul lui ξ cu o aproximaţie mai mică decît ε ($\varepsilon > 0$ prescris), este suficient să alegem N minim astfel încît $\frac{k^N}{1-k}\delta < \varepsilon$ şi ξ se aproximează cu x_N, calculul lui x_N fiind făcut într-un număr **finit** de paşi.

EXEMPLUL 1. Fie X unul din intervalele $(-\infty,a]$, $[a,b]$, $[a,\infty)$ sau $\mathbb{R}$, care sun spaţii metrice complete; presupunem că o ecuaţie $f(x) = 0$ se scrie echivalen sub forma $x = \varphi(x)$, unde $\varphi : X \to X$ este o funcţie derivabilă astfel înc

$k = \sup\limits_{x\in X}|\varphi'(x)| < 1$. Atunci φ este o contracţie de coeficient k, deoarece $\forall\, x,y \in X$ există v între x şi y astfel încît

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x-y)\cdot\varphi'(v)| \leq k\cdot|x-y| = kd(x,y).$$

Soluţia ξ a ecuaţiei $x = \varphi(x)$ se determină prin metoda aproximaţiilor succesive. Pentru a da un exemplu concret, ne propunem să rezolvăm cu aproximaţia $\leq 10^{-2}$ ecuaţia $10x - 1 = \sin x$. O analiză simplă arată că ecuaţia are o singură soluţie $\xi \in [0,1]$; ecuaţia se scrie echivalent $x = \frac{1}{10}(1+\sin x)$ şi notînd $X = [0,1]$ şi $\varphi(x) = \frac{1}{10}(1+\sin x)$, avem o contracţie de coeficient $k = \sup\limits_{x\in[0,1]}|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{10}$. Alegem $x_0 = 0$ deci $x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{10}$ şi punem condiţia $\frac{(1/10)^N}{1-(1/10)}\delta < 10^{-2}$, unde $\delta = d(x_0,x_1) = |x_0 - x_1| = \frac{1}{10}$; valoarea minimă a lui N este 2 deci $\xi \approx x_2 = \varphi(x_1) = \frac{1}{10}\left(1+\sin\frac{1}{10}\right) \approx 0{,}1099$.

EXEMPLUL 2. Fie $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ o matrice pătratică de ordin 2 ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) cu $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2 < 1$. Pentru orice matrice coloană $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $b_1,b_2 \in \mathbb{R}$ fie aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = AX + B$, unde un punct din $\mathbb{R}^2$ este identificat cu matricea coloană a coordonatelor lui; explicit

$$\varphi(x_1,x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2).$$

Atunci φ este o contracţie, de coeficient $k = \left(\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$, aşa cum se verifică imediat. Ecuaţia matriceală $X = AX + B$ are soluţie unică ξ ce se poate determina prin metoda aproximaţiilor succesive: $X_0 = 0$, $X_1 = \varphi(X_0) = B$, $X_2 = \varphi(X_1) = AX + B$, $X_3 = \varphi(X_2) = AX_2 + B = A^2B + AB + B$ etc.

Metoda aproximaţiilor succesive se programează fără dificultate.

2. Topologia unui spaţiu metric

În acest paragraf vom pune în evidenţă anumite tipuri remarcabile de submulţimi ale unui spaţiu metric fixat (X,d), permiţînd studiul aprofundat al funcţiilor – proprietăţi locale, globale şi analiza trecerii la limită.

Definiţia III. 4. Fie $a \in X$ un punct fixat. Pentru orice număr real strict pozitiv $r > 0$, se definesc:

$B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ (**bila deschisă** de centru a şi rază r)

$B'(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$ (**bila închisă** de centru a şi rază r)

$S(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$ (**sfera** de centru a şi rază r).

O mulţime $V \subset X$ se numeşte **vecinătate a punctului** a dacă există $r > 0$ astfel încît $B(a,r) \subset V$, deci V conţine o bilă deschisă centrată în a. Vom nota cu $\boldsymbol{V}_a$ mulţimea vecinătăţilor lui a.

Majoritatea noţiunilor importante ale analizei sunt definite local în termeni de bile, vecinătăţi, limită etc. şi termenul de topologie corespunde etimologiei ("topos" = loc).

EXEMPLUL 1. Fie $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$. În acest caz, $B(a,r)$ = intervalul deschis $(a - r, a + r)$, $B'(a,r) = [a - r, a + r]$ şi $S(a,r) = \{a - r, a + r\}$.

EXEMPLUL 2. Fie $X = \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$, $r > 0$. În acest caz, bila

$$B(a,r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2\}.$$

În cazul $n = 2$ bilele sunt discurile pline, iar pentru $n = 3$, sferele pline.

EXEMPLUL 3. Fie X spaţiul metric al funcţiilor mărginite $A \to \mathbb{R}$, cu distanţa "sup". Dacă $f \in X$ şi $r > 0$, bila $B(f,r)$ este mulţimea funcţiilor $g : A \to \mathbb{R}$ astfel încît $\sup |f(x) - g(x)| < r$; dacă $g \in B(f,r)$, atunci $\forall x \in A$, $f(x) - r < g(x) < f(x) + r$.

TEOREMA III. 3. (proprietăţile vecinătăţilor unui punct). Fie X un spaţiu metric.

1) Pentru orice $V \in \boldsymbol{V}_a$, avem $a \in V$;
2) Dacă $U \in \boldsymbol{V}_a$ şi $V \supset U$, atunci $V \in \boldsymbol{V}_a$;
3) Dacă $V_1, V_2 \in \boldsymbol{V}_a$, atunci $V_1 \cap V_2 \in \boldsymbol{V}_a$;
4) Dacă $a, b \in X$, $a \neq b$, atunci există $V \in \boldsymbol{V}_a$ şi $W \in \boldsymbol{V}_b$ astfel încît $V \cap W = \emptyset$.

DEMONSTRAŢIE. 1), 2), 3) rezultă direct din definiţie. Proprietatea 3 se extinde la orice număr **finit** de vecinătăţi ale unui punct fixat. Demonstrăm 4) şi fie $r = \frac{1}{3} d(a,b)$, deci $r > 0$. Luăm $V = B(a,r)$ şi $W = B(b,r)$. Rezultă că V şi W sunt disjuncte, deoarece altminteri $\exists\, x \in V \cap W$ deci $d(x,a) < r$, $d(x,b) < r$ şi ca atare $d(a,b) \leq d(x,a) + d(x,b) < 2r$, adică $3r < 2r$, absurd.

Definiţia III. 5. Fie (X,d) un spaţiu metric.

O submulţime $D \subset X$ se numeşte **deschisă** (sau **un deschis** al lui X) dacă $\forall\, a \in D$, $\exists\, r > 0$ astfel încît $B(a,r) \subset D$, adică $D \in \boldsymbol{V}_a$.

O submulţime $F \subset X$ se zice **închisă** (**închis** al lui X) dacă $X \setminus F = CF$ este deschisă.

EXEMPLUL 1. $\emptyset$ şi X sunt simultan închise şi deschise. Pentru $\emptyset$ condiţia din definiţia anterioară rezultă prin reducere la absurd.

EXEMPLUL 2. Pentru $X = \mathbb{R}$ şi $a < b$, intervalele (a,b), (a,∞) sunt mulţimi deschise, iar $[a,b]$, $[a,\infty)$ sunt închise; dar $[a,b)$ nu este nici închis nici deschis. Mulţimea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ este închisă, iar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nu este nici deschisă nici închisă. Se poate arăta că o submulţime $D \subset \mathbb{R}$ este deschisă dacă şi numai dacă este reuniune finită sau numărabilă de intervale deschise.

EXEMPLUL 3. În spaţiul $X = \mathbb{R}^2$ discul $\{x^2 + y^2 < r^2\}$ şi exteriorul său $\{x^2 + y^2 > r^2\}$ sunt deschise; pentru $0 < r < R$, coroana circulară $\{r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ este deschisă. Mulţimea redusă la un punct din $\mathbb{R}^2$ este închisă, ca şi orice dreptunghi $[a,b] \times [c,d]$.

EXEMPLUL 4. Fie X un spaţiu metric oarecare; pentru orice $a \in X$, mulţimea $\{a\}$ este închisă (căci $\forall\, b \in X \setminus \{a\}$ alegem o bilă $B(b,r)$ care nu conţine a deci $B(b,r) \subset X \setminus \{a\}$ şi ca atare, $X \setminus \{a\}$ este deschisă). Orice bilă $B(a,r)$, $r > 0$ este o mulţime deschisă (căci $\forall\, x \in B(a,r)$, avem $B(x,\rho) \subset B(a,r)$, unde $\rho = r - d(a,x)$).

EXEMPLUL 5. Fie Y un spaţiu metric şi $X \subset Y$ cu distanţa indusă. O submulţime $A \subset X$ este deschisă în $X \Leftrightarrow$ există un deschis $D \subset Y$ astfel încît $A = D \cap X$. Pentru a demonstra acest fapt este suficient de observat că $\forall\, a \in X$ şi $r > 0$, $B_X(a,r) = B_Y(a,r) \cap X$.

TEOREMA III. 4. (proprietăţile mulţimilor deschise şi închise). Fie X un spaţiu metric.

1) $\emptyset$ şi X sunt mulţimi deschise;
2) Orice reuniune de mulţimi deschise este deschisă;
3) Orice intersecţie **finită** de mulţimi deschise este deschisă.
1') $\emptyset$ şi X sunt închise;
2') Orice intersecţie de mulţimi închise este închisă;
3') Orice reuniune **finită** de mulţimi închise este închisă.

Demonstraţia este imediată. Afirmaţiile 2', 3' rezultă din 2 şi respectiv 3 aplicînd formulele lui de Morgan.

Comentariu. Dacă X este o mulţime nevidă şi dacă se consideră o colecţie $\boldsymbol{T}$ de submulţimi ale lui X astfel încît:

1° Ø, X aparţin lui T;
2° Orice reuniune de mulţimi din T aparţine colecţiei T;
3° Orice intersecţie **finită** de mulţimi din T aparţine lui T, atunci se spune că pe X este definită o topologie T, iar perechea (X,T) se numeşte **spaţiu topologic**. Conform 1), 2), 3) din teorema III. 4, rezultă că mulţimile deschise dintr-un spaţiu metric formează o topologie, deci orice spaţiu metric este în mod natural un spaţiu topologic.

Din nou fixăm un spaţiu metric (X,d), considerat ca un fel de "spaţiu ambiant". Pentru orice submulţime $A \subset X$ vom asocia interiorul, aderenţa şi frontiera lui A.

Definiţia III. 6. Un punct $a \in A$ se zice **interior lui** A dacă există $r > 0$ astfel încît $B(a,r) \subset A$, adică $A \in \mathbf{V}_a$. Mulţimea punctelor interioare lui A se numeşte **interiorul** lui A, notat $\mathring{A}$.

Un punct $a \in X$ se zice **aderent lui** A dacă $\forall V \in \mathbf{V}_a$, $V \cap A \neq Ø$; mulţimea acestora se numeşte **aderenţa** lui A, notată $\bar{A}$. Dacă $\bar{A} = X$, se spune că A este **densă** în X.

Mulţimea $\mathrm{Fr}\, A = \bar{A} \cap \complement A$ se numeşte **frontiera lui** A.

Este evident că $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, pentru orice $A \subset X$, iar $\mathrm{Fr}\, A$ este mulţimea punctelor $x \in X$ cu proprietatea că orice bilă centrată în x intersectează atît A cît şi $\complement A$.

EXEMPLUL 1. Fie $X = \mathbb{R}$ şi $A = [0,1)$. În acest caz, $\mathring{A} = (0,1)$, $\bar{A} = [0,1]$ şi $\mathrm{Fr}\, A = \{0,1\}$. Apoi $\mathring{\mathbb{Q}} = Ø$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (deci $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$) şi $\mathrm{Fr}\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Remarcăm că dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime mărginită, atunci $\sup A$ şi $\inf A$ aparţin aderenţei $\bar{A}$.

EXEMPLUL 2. Fie $X = \mathbb{R}^2$ şi $A = \{x^2 + y^2 < 1\}$. Atunci $\mathring{A} = A$, $\bar{A} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ şi $\mathrm{Fr}\, A = \{x^2 + y^2 = 1\}$.

EXEMPLUL 3. Dacă $A \subset B \subset X$, atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$, $\bar{A} \subset \bar{B}$, dar se poate întîmpla ca $\mathrm{Fr}\, A \not\subset \mathrm{Fr}\, B$ (de exemplu, luăm $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ şi $B = \mathbb{Q} \cup [0,1]$; aici $\mathrm{Fr}\, A = \mathbb{R}$ şi $\mathrm{Fr}\, B = (-\infty,0] \cup [1,\infty)$).

Dăm o listă de proprietăţi ale interiorului şi închiderii:
Dacă A este o submulţime a unui spaţiu metric X, atunci:

a) $\mathring{A} = \bigcup_{D \subset A} D$ (D deschis) deci $\mathring{A}$ este deschisă;

b) A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \mathring{A}$;

c) $\bar{A} = \bigcap_{I \supset A} I$ (I închis) deci $\bar{A}$ este închisă;

d) A este închisă dacă şi numai dacă $A = \bar{A}$.

e) Dacă $a \in X$, atunci $a \in \bar{A} \Leftrightarrow$ există un şir $(a_n)_{n \geq 0}$ de puncte din A astfel încît $a_n \to a$.

f) $X \setminus \bar{A} = \mathring{\overline{X \setminus A}}$ şi $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$.

DEMONSTRAŢIA rezultă din definiţii.

Remarcăm că o submulţime $A \subset X$ este închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir convergent de puncte din A, limita şirului aparţine de asemenea lui A; aceasta justifică termenul de "închisă". De asemenea $A \subset X$ este densă dacă şi numai dacă orice punct din X este limita unui şir convergent de puncte din A.

3. Aplicaţii continue

Fie (X,d) şi (Y,d') două spaţii metrice şi $f : X \to Y$ o aplicaţie. Cazul tratat în liceu $X \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ şi cel al funcţiilor complexe $X \subset \mathbb{C}$, $Y = \mathbb{C}$ sunt ambele nişte particularizări.

TEOREMA III. 5. Fie $a \in X$ un punct fixat. Sunt echivalente următoarele condiţii:
a) $\forall V \in \mathbf{V}_{f(a)}$ $\exists U \in \mathbf{V}_a$ astfel încît $f(U) \subset V$;
b) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $d(x,a) < \delta_\varepsilon$ să implice $d'(f(x),f(a)) < \varepsilon$;
c) pentru orice şir $x_n \to a$, rezultă că $f(x_n) \to f(a)$.

DEMONSTRAŢIE. a) $\Rightarrow$ b). Presupunem că a) este îndeplinită şi $\varepsilon > 0$ este dat. Luăm $V = B(f(a),\varepsilon)$ şi conform ipotezei există $U \in \mathbf{V}_a$ astfel încît $f(U) \subset V$; apoi alegem $\delta > 0$ astfel încît $B(a,\delta) \subset U$ şi se verifică imediat b).
b) $\Rightarrow$ c). Presupunem condiţia b) îndeplinită şi fie $x_n \to a$. Dacă $\varepsilon > 0$ este dat, alegem $\delta > 0$ conform b). De la un rang N încolo avem $d(x_n,a) < \delta$ deci $d'(f(x_n),f(a)) < \varepsilon$ adică $f(x_n) \to f(a)$.
c) $\Rightarrow$ a). Presupunem c) şi că afirmaţia a) nu ar fi adevărată deci ar exista o vecinătate V a lui $f(a)$ astfel încît pentru **orice** vecinătate U a lui a să avem $f(U) \not\subset V$. Pentru orice întreg $n \geq 1$ luăm $U = B(a,\frac{1}{n})$ şi alegem $x_n \in U$ astfel încît $f(x_n) \notin V$. Ar rezulta că $x_n \to a$ şi $f(x_n) \not\to f(a)$.

Definiţia III. 7. Dacă o aplicaţie f satisface una din condiţiile echivalente din teorema III. 5., se spune că f **este continuă în punctul** $a \in X$. Aplicaţia f se zice **continuă pe** $A \subset X$ dacă este continuă în orice punct $a \in A$; dacă este continuă pe întreg X se spune simplu că f este **continuă**.

Condiţiile a), b), c), sunt numite respectiv definiţia continuităţii cu vecinătăţi, cu $\varepsilon - \delta$ şi cu şiruri.

COROLAR 1. Fie $f: X \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în punctul $a \in X$ şi $f(a) > 0$ (respectiv $f(a) < 0$). Atunci f este pozitivă (respectiv negativă) pe o vecinătate a lui a.

DEMONSTRAŢIE. Fie $f(a) > 0$ şi $\varepsilon > 0$ ales astfel încît $\varepsilon < f(a)$. Alegem $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Conform teoremei III. 5. a), există $U \in V_a$ astfel încît $f(U) \subset V$; $\forall x \in U$ avem $f(x) \in V$ deci $f(x) > f(a) - \varepsilon > 0$. Cazul cînd $f(a) < 0$ se tratează analog.

COROLAR 2. Fie X,Y,Z spaţii metrice şi $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ două aplicaţii. Dacă $a \in X$, f este continuă în a şi g este continuă în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a. Dacă f şi g sunt continue, atunci $g \circ f$ este continuă pe X.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x_n \to a$, atunci $f(x_n) \to f(a)$ şi $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ deci $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$ etc.

TEOREMA III. 6. Fie $f: X \to Y$ o aplicaţie între două spaţii metrice. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:

a) f este continuă;

b) pentru orice $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

c) pentru orice mulţime F închisă în Y, $f^{-1}(F)$ este închisă în X;

d) $\forall D \subset Y$ deschis, $f^{-1}(D)$ este deschis în X.

DEMONSTRAŢIE. a) $\Rightarrow$ b). Fie $\forall a \in \overline{A}$ şi $b = f(a)$. Avem de arătat că orice $V \in V_b$ intersectează $f(A)$. Dar f este continuă în a şi atunci există $U \in V_a$ astfel încît $f(U) \subset V$. Deoarece $a \in \overline{A}$, rezultă că U intersectează A deci $f(U)$ intersectează $f(A)$ deci $V \cap f(A) \neq \emptyset$.

b) $\Rightarrow$ c). Avem $F = \overline{F}$ şi aplicînd b) pentru $f^{-1}(F)$, rezultă

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F \text{ deci } \overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F);$$

incluziunea inversă fiind evidentă, rezultă că $f^{-1}(F)$ este închisă.

c) $\Rightarrow$ d). Luăm $F = Y \setminus D$ deci F este închisă şi conform c) $f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus D) = X \setminus f^{-1}(D)$ va fi închisă deci $f^{-1}(D)$ este deschisă.

d) $\Rightarrow$ a). Fie $\forall a \in X$ şi $b = f(a)$. Fie $V \in V_b$ deci există $r > 0$ astfel încît $D = B(b,r) \subset V$. Deoarece $U = f^{-1}(D)$ este deschis şi conţine a, rezultă că $U \in V_a$ şi evident $f(U) \subset D \subset V$ deci f satisface condiţia a din teorema III. 5 şi f rezultă continuă în punctul a. Acesta din urmă fiind arbitrar, f este continuă.

EXEMPLUL 1. Fie X un spaţiu metric şi $c \in X$ un punct fixat. Aplicaţia constantă $f: X \to X$, $x \mapsto c$ este continuă (dacă $a \in X$ este fixat arbitrar şi $x_n \to a$, atunci evident $f(x_n) = c \to f(a) = c$). De asemenea aplicaţia identică

$1_X : X \to X$ este continuă.

EXEMPLUL 2. Aplicaţiile $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $s(x,y) = x + y$ şi $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x,y) = xy$ sunt continue (folosind de exemplu definiţia cu şiruri).

EXEMPLUL 3. Orice funcţie polinomială $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ este continuă (deoarece $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ şi $z_n \to \alpha$, rezultă $P(z_n) \to P(\alpha)$).

EXEMPLUL 4. Proiecţiile canonice $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$ $(1 \le i \le n)$ sunt continue. Dacă X este un spaţiu metric şi o aplicaţie $f: X \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ este continuă, atunci şi componentele ei $f_i : X \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ sunt continue (deoarece $f_i = p_i \circ f$ şi aplicăm corolarul 2 al teoremei III. 5); reciproc, dacă $f_1,\ldots,f_n$ sunt continue, atunci f este continuă (deoarece $\forall x \in X$, $x_n \to x$, atunci $f_i(x_n) \to f_i(x)$, $1 \le i \le n$ şi ca atare, $f(x_n) \to f(x)$).

EXEMPLUL 5. Dacă $f,g : X \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi $\lambda \in \mathbb{R}$ o constantă, atunci

$$f+g,\ f-g,\ \lambda f,\ fg,\ |f|,\ \max(f,g) = \tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|), \min(f,g) = \tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

sunt de asemenea continue.

EXEMPLUL 6. Fie X un spaţiu metric şi $f: X \to \mathbb{C}$; se pot asocia trei funcţii cu valori reale, anume:

$P: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Re} f(x)$ (**partea reală** a lui f);
$Q: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Im} f(x)$ (**partea imaginară** a lui f);
$|f| : X \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |f(x)|$ (**modulul** lui f).

Evident, $f = P + iQ$, $P = \dfrac{f+\overline{f}}{2}$, $Q = \dfrac{f-\overline{f}}{2i}$. Dacă f este continuă, atunci P şi Q sunt continue şi reciproc. De asemenea, dacă f este continuă, atunci $|f| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ rezultă continuă. De exemplu, pentru $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ avem $P + iQ = (x + iy)^2$ deci $P(x,y) = x^2 - y^2$ şi $Q(x,y) = 2xy$.

Fixăm două spaţii metrice X şi Y şi o aplicaţie $f: A \to Y$ definită pe o submulţime $A \subset X$.

Definiţia III. 8. Un punct $a \in X$ se numeşte **punct de acumulare** pentru A dacă $\forall V \in V_a$, $V \cap A$ conţine cel puţin un punct distinct de a. Se spune că f **admite limita** l $(l \in Y)$ în punctul de acumulare a şi se scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ dacă

funcţia $g : A \to Y$, $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \setminus \{a\} \\ l & \text{dacă } x = a \end{cases}$ este continuă în punctul a.

Aceasta este echivalent cu faptul că pentru orice şir $x_n \to a$, $x_n \neq a$, rezultă $f(x_n) \to l$. Evident, dacă $f : A \to Y$ ($A \subset X$) şi $a \in A$ este un punct de acumulare pentru A, atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ există şi este egală cu $f(a)$. Pentru a demonstra că $f : A \to Y$ nu are limită în punctul de acumulare a al lui A este suficient să evidenţiem două şiruri

$$x_n' \to a,\ x_n'' \to a \quad (x_n', x_n'' \in A \setminus \{a\})$$

astfel încît fie că unul din şirurile $f(x_n')$, $f(x_n'')$ nu este convergent, fie că aceste şiruri sunt convergente dar nu au aceeaşi limită.

EXEMPLUL 1. Fie $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Limita $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ nu există deoarece luînd şirul $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right) \to (0,0)$, cu λ parametru real, avem $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right) = \dfrac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ depinde de λ.

EXEMPLUL 2. Fie $Y = \mathbb{R}$ şi $f, g : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset X$) două funcţii numerice astfel încît $\forall x \in A$, $|f(x)| \le g(x)$. Dacă $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$, deoarece $\left|\dfrac{x^3}{x^2 + y^2}\right| \le |x|$ pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$.

EXEMPLUL 3. În cazul $Y = \mathbb{R}^p$, limita se face pe componente. Anume, dacă $f : A \to \mathbb{R}^p$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$, atunci f are limită în $a \Leftrightarrow f_1, \ldots, f_p$ au limită în a şi în plus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = (\lim\limits_{x \to a} f_1(x), \ldots, \lim\limits_{x \to a} f_p(x))$.

EXEMPLUL 4. Fie $X = \mathbb{R}^p$, $A \subset X$, a un punct de acumulare a lui A şi $f : A \to Y$. Pentru orice vector nenul $\mathbf{v}$ din $\mathbb{R}^p$ se poate defini **limita lui f în punctul a, după direcţia lui $\mathbf{v}$** ca fiind $\lim\limits_{t \to 0} f(a + t\mathbf{v})$; evident, punctele $x = a + t\mathbf{v}$ au proprietatea că vectorul $x - a$ este coliniar cu $\mathbf{v}$, ceea ce justifică terminologia.

Dacă $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ există, atunci există şi limita lui f în a după orice direcţie (reciproc, nu). Fie $f(x,y) = x + y\sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ şi $f(x,y) = 0$ dacă $x = 0$. Atunci

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0;\quad \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) = 0 \text{ dar } \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,y)\right) \text{ nu există.}$$

4. Funcţii continue pe mulţimi compacte şi pe mulţimi conexe

Fie X un spaţiu metric.

Definiţia III. 9. O submulţime $K \subset X$ se numeşte **compactă** (sau un **compact**) dacă din orice acoperire a lui K formată din mulţimi deschise, se poate extrage o subacoperire finită, adică ori de cîte ori $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} D_i$ cu D_i deschişi în X, există o submulţime **finită** $J \subset I$ astfel încît $K \subset \bigcup\limits_{i \in J} D_i$.

O submulţime $M \subset X$ se zice **mărginită** dacă ea este conţinută într-o bilă deschisă.

Se poate demonstra că faptul că o submulţime $K \subset X$ este compactă este echivalent cu aceea că orice şir de puncte din K are un subşir convergent către un punct din K; în cazul $X = \mathbb{R}^n$, se demonstrează că o submulţime este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

Spaţiul X însuşi se zice **compact** dacă mulţimea X este compactă, adică orice şir de puncte din X are un subşir convergent. Dacă spaţiul X este compact, atunci el este complet.

EXEMPLUL 1. Orice interval $[a,b]$ este un spaţiu metric compact. De asemenea orice paralelipiped $P = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ din $\mathbb{R}^n$ este o mulţime compactă (fiind închisă şi mărginită).

EXEMPLUL 2. Sfera $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ şi elipsoidul plin $\{x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 \le 1\}$ sunt mulţimi compacte.

EXEMPLUL 3. Fie X un spaţiu metric discret infinit. El este o mulţime închisă şi mărginită, dar nu este compactă (căci $X = \bigcup\limits_{a \in X} \{a\}$, mulţimile $\{a\}$ sunt deschise şi nu există o subacoperire finită pentru că ar rezulta că mulţimea

X este finită).

TEOREMA III. 7. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie continuă între două spaţii metrice şi $K \subset X$ o submulţime compactă. Atunci $f(K)$ este compactă.

DEMONSTRAŢIE. Fie $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ cu D_i deschişi în Y. Atunci $K \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} D_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$ şi $f^{-1}(D_i)$ sunt deschişi în X, conform teoremei III. 6. Deoarece K este compactă, există $J \subset I$ finită astfel încît $K \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)$ deci $f(K) \subset f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(D_i)) \subset \bigcup_{i \in J} D_i$. Aşadar, din orice acoperire deschisă a lui $f(K)$ se poate extrage una finită şi ca atare mulţimea $f(K)$ este compactă.

Reamintim că o funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ este mărginită dacă mulţimea $f(X)$ este mărginită; în acest caz, se notează $\sup f = \sup f(X)$ şi $\inf f = \inf f(X)$ şi se spune că f **îşi atinge marginile** dacă există puncte a,b în X astfel încît $\sup f = f(a)$ şi $\inf f = f(b)$. Cu aceste pregătiri, rezultă:

COROLAR. Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu valori reale. Dacă X este un spaţiu metric compact, atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile.

DEMONSTRAŢIE. Conform teoremei III. 7, mulţimea $f(X)$ rezultă compactă deci este închisă şi mărginită. Aşadar, f este funcţie mărginită. În plus, numerele reale $\sup f$, $\inf f$ care aparţin lui $\overline{f(X)}$, vor aparţine de fapt lui $f(X)$, deoarece $\overline{f(X)} = f(X)$.

EXEMPLUL 1. Funcţia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ este continuă, dar nu este mărginită; marginile ei sunt $\inf f = 1$ şi $\sup f = +\infty$ şi nu sunt atinse. Aşadar, ipoteza de compacitate din corolarul precedent este esenţială.

EXEMPLUL 2. Fie A,B,C trei puncte distincte şi necoliniare în plan şi X triunghiul ABC (interiorul reunit cu frontiera sa, obţinută reunind cele trei laturi). Atunci suma $MA + MB + MC$, unde M este un punct oarecare din planul triunghiului, are minimul şi maximul atinse în X. Într-adevăr, X este mulţime compactă, iar suma respectivă "variază continuu cu punctul M" şi se aplică precedentul corolar (fixînd un reper în planul triunghiului, suma devine o funcţie continuă de coordonatele lui M).

Definiţia III. 10. O aplicaţie $f : X \to Y$ între două spaţii metrice se numeşte **uniform continuă** dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $\forall\, x,y \in X$ şi $d(x,y) < \delta(\varepsilon)$, să avem $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. (Am notat cu aceeaşi literă d distanţele în X şi Y).

Evident, orice aplicaţie uniform continuă este continuă.

TEOREMA III. 8. Dacă $f : X \to Y$ este continuă şi X este compact, atunci f este uniform continuă pe X.

DEMONSTRAŢIE. Fixăm $\forall\, \varepsilon > 0$. Cum f este continuă în orice punct $a \in X$, există $\delta(a) > 0$ astfel încît $d(x,a) < \delta$ implică $d(f(x),f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Evident, $X = \bigcup_{a \in X} B(a, \frac{\delta(a)}{2})$ şi cum X este compact, există un număr finit de puncte $a_1,\dots,a_p \in X$ astfel încît

$$X = B(a_1, \frac{\delta(a_1)}{2}) \cup \dots \cup B(a_p, \frac{\delta(a_p)}{2}) \text{ şi fie } \delta = \frac{1}{2}\min(\delta(a_1),\dots,\delta(a_p))$$

deci $\delta > 0$ (strict !). Fie acum $\forall\, x,y \in X$ cu $d(x,y) < \delta$. Atunci există i, $1 \le i \le p$, astfel încît $x \in B(a_i, \frac{\delta(a_i)}{2})$ şi ca atare, $d(f(x),f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ deci

$$d(y,a_i) \le d(y,x) + d(x,a_i) < \delta + \frac{\delta(a_i)}{2} \le \delta(a_i) \text{ deci } d(f(y),f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

În concluzie, $d(f(x),f(y)) \le d(f(x),f(a_i)) + d(f(y),f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Aşadar, f este uniform continuă pe X.

EXEMPLU. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este uniform continuă. (În caz contrar, să luăm $\varepsilon = 1$; atunci există $\delta > 1$ astfel încît, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta$ să rezulte $|x^2 - y^2| < 1$. Fie $x = n$, $y = n + \delta/2$ cu $n \ge 1$ natural. Atunci $\forall\, n \ge 1$, $n\delta + \delta^2/4 < 1$, ceea ce este absurd).

O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte **etajată** (sau în **scară**) dacă există o diviziune $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a intervalului $[a,b]$ astfel încît f să fie constantă pe fiecare din intervalele $[a,x_1)$, $[x_1,x_2)$, ..., $[x_{n-1},b]$. Se verifică imediat că suma, diferenţa, produsul a două funcţii etajate pe $[a,b]$ au aceeaşi proprietate.

COROLAR. Pentru orice funcţie continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ există un şir $\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ de funcţii etajate astfel încît $\varphi_n \to f$ în $\mathcal{M}_{[a,b]}$.

DEMONSTRAŢIE. Fixăm $\forall\, \varepsilon > 0$. Deoarece f este uniform continuă există $\delta > 0$ astfel încît $\forall\, x,y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Alegem puncte

echidistante $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ astfel încît $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$ pentru $1 \le i \le n$ şi definim funcţia etajată $\varphi_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ punînd $\varphi_\varepsilon(x) = f(a)$ dacă $x \in [a, x_1)$; $\varphi_\varepsilon(x) = f(x_1)$ dacă $x \in [x_1, x_2)$ ..., $\varphi_\varepsilon(x) = f(x_{n-1})$ dacă $x \in [x_{n-1}, b]$.
Evident $\|\varphi_\varepsilon - f\| = \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \le \varepsilon$; ultima inegalitate este o consecinţă a faptului că $\forall\, x \in [a,b]$ aparţine exact unui interval $[x_{i-1}, x_i)$, $1 \le i \le n$ al diviziunii şi cum $x_i - x_{i-1} < \delta$, rezultă $|\varphi_\varepsilon(x) - f(x)| = |f(x_{i-1}) - f(x)| < \varepsilon$; această relaţie are loc şi pentru $x = b$. Luăm $\varepsilon = 1/n$, $n \ge 1$ şi găsim $\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ etajate astfel încît $\|\varphi_n - f\| \le 1/n$ deci $\varphi_n \to f$.

Definiţia III. 11. Un spaţiu metric X se numeşte **conex** dacă nu există submulţimi deschise şi nevide A,B astfel încît $A \cup B = X$ şi $A \cap B = \emptyset$.

Echivalent, X este conex $\Leftrightarrow$ orice submulţime nevidă simultan închisă şi deschisă în X coincide cu X.

O submulţime $C \subset X$ a unui spaţiu metric se numeşte **conexă** dacă este conexă ca spaţiu metric cu distanţa indusă; aceasta revine la faptul că nu există mulţimi deschise nevide D_1, D_2 în X astfel încît $D_1 \cap D_2 \cap C = \emptyset$, $D_1 \cap C \ne \emptyset$, $D_2 \cap C \ne \emptyset$ şi $C \subseteq D_1 \cup D_2$.
Se poate arăta că o submulţime I a lui $\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este un interval (adică $\forall\, a,b \in I$, $a < b$, avem $[a,b] \subset I$). Dacă $u,v \in \mathbb{R}^n$ se defineşte segmentul $[u,v] = \{(1-t)u + tv \mid t \in [0,1]\}$ de capete u,v. O mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$ este conexă $\Leftrightarrow$ pentru orice $a,b \in D$ există o linie poligonală L care uneşte a,b şi este conţinută în D (aşadar, $\exists\, x_1, x_2, \dots, x_p \in D$ astfel încît $L = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \dots \cup [x_{p-1},x_p] \subset D$). Intuitiv, mulţimile conexe sunt mulţimi "dintr-o bucată". De altfel, se poate arăta că dacă $(A_i)_{i \in I}$ sunt submulţimi conexe ale unui spaţiu metric X şi dacă $\bigcap_{i \in I} A_i \ne \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este conexă.

TEOREMA III. 9. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie continuă şi surjectivă între două spaţii metrice. Dacă X este conex, atunci Y este conex.

DEMONSTRAŢIE. Dacă Y ar fi neconex,atunci ar exista două mulţimi deschise nevide $A,B \subset Y$ astfel încît $A \cup B = Y$, $A \cap B = \emptyset$. Atunci $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ ar fi de asemenea deschise (căci f este continuă), nevide (căci f este surjectivă) şi în plus $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Deci X ar rezulta neconex, absurd

COROLAR. (G. DARBOUX, 1842 – 1917) Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă pe un spaţiu metric conex. Dacă există puncte a,b în X astfel încît $f(a) < 0$ şi

$f(b) > 0$, atunci există $\xi \in X$ astfel încît $f(\xi) = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea $f(X) \subset \mathbb{R}$ rezultă conexă conform teoremei III. 9. deci va fi un interval. Atunci $[f(a), f(b)] \subset f(X)$. Dar 0 aparţine intervalului $[f(a), f(b)]$ deci $0 \in f(X)$.

EXEMPLU. Asimilăm suprafaţa Pămîntului cu o suprafaţă sferică X, conexă, din $\mathbb{R}^3$. În ipoteza că temperatura unui punct variază continuu cu punctul, arătăm că există două puncte diametral opuse ξ, ξ' pe X avînd aceeaşi temperatură; pentru aceasta, $\forall\, x \in X$ notăm cu x' diametralul său opus şi cu $t(x)$ temperatura în punctul x. Se consideră funcţia continuă $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = t(x) - t(x')$. Se observă că $f(x) \cdot f(x') \le 0$ deci conform corolarului precedent $\exists\, \xi \in X$ astfel încît $f(\xi) = 0$ adică $t(\xi) = t(\xi')$.

O aplicaţie $f : X \to Y$ între două spaţii metrice se numeşte **omeomorfism** dacă f este bijectivă, continuă şi f^{-1} este continuă. Două spaţii metrice se zic **omeomorfe** dacă există un omeomorfism între ele.
Multe din noţiunile definite anterior – închişi, compacţi, mulţimi conexe, continuitate, se extind fără dificultăţi principiale la cazul mai general al spaţiilor topologice. Proprietăţile topologice (ce pot fi formulate în termeni de mulţimi deschise) sunt invariante la omeomorfisme; de exemplu dacă $f : X \to Y$ este un omeomorfism, atunci o submulţime A a lui X este compactă (respectiv densă, conexă) dacă şi numai dacă $f(A)$ are această proprietate.

5. 10 exerciţii

1. a) Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{2^n - 1}{2^n + 1}, \frac{1}{n}, \sqrt[n]{2} \right)$ în $\mathbb{R}^4$.

b) Fie $A_n = \left(\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n} \right)$, $n \ge 1$. Să se determine parametrul real λ dacă punctul $\lim_{n \to \infty} A_n$ este la distanţa minimă de $(1, e^{-\lambda})$ în $\mathbb{R}^2$.

2. Fie $f : X \to Y$ o bijecţie şi δ o distanţă pe Y. Să se arate că punînd $d(x,y) = \delta(f(x), f(y))$, $\forall\, x,y \in X$, se obţine o distanţă pe X. Folosind acest rezultat, să se arate că punînd $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}y|$ se obţine o distanţă pe $\mathbb{R}$ şi că în acest spaţiu metric, şirul $x_n = n$ este Cauchy, dar nu convergent.

3. Pentru orice $x \in \overline{\mathbb{R}}$, notăm $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dacă } x = \infty \\ -1 & \text{dacă } x = -\infty \end{cases}$

Să se arate că mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$ este un spațiu metric compact relativ la distanța $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Explicitați bila $B(\infty,r)$, $r > 0$.

4. Folosind principiul contracției, să se rezolve (în $\mathbb{R}$), cu aproximație 10^{-3}, ecuațiile:
a) $x^3 + 12x - 1 = 0$;
b) $3x + e^{-x} = 1$;
c) $x^5 + x^3 - 2{,}1 = 0$.

5. a) Să se arate că dacă $a,b \in \mathbb{C}$ și $|a| < 1$, atunci aplicația $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = az + b$ este o contracție.
b) Fie D o dreaptă fixată dintr-un plan P și $\psi : P \to P$ aplicația care asociază oricărui punct $a \in P$, proiecția ortogonală a lui a pe D. Este ψ o contracție ? Care sunt punctele fixe ale lui ψ ?

6. a) Dacă $f,g : X \to Y$ sunt aplicații continue, $A \subset X$ este densă și $\forall\, x \in A$, $f(x) = g(x)$, să se arate că $f = g$.
b) Fie X un spațiu metric și $x_n \to a$. Să se arate că mulțimea $\{a,x_1,x_2,...\}$ este compactă.
c) Fie (X,d) și (X',d') spații metrice. Să se arate că $X \times X'$ este spațiu metric relativ la distanța δ definită prin $\delta((x,x'),(y,y')) = d(x,y) + d'(x',y')$ și că dacă X, X' sunt compacte, la fel este $X \times X'$.

7. Care din mulțimile următoare:
$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$,
$A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$,
$A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 2\}$,
$A_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -1 \leq z \leq 1\}$.
sunt: a) deschise; b) închise; c) compacte; d) conexe ?

8. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{dacă } xy \geq 0 \\ y & \text{dacă } xy < 0 \end{cases}$

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & \text{dacă } z \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } z = 0 \end{cases}$

9. Fie $f : X \to Y$ o aplicație continuă și bijectivă între spații metrice. Să se arate că dacă X este compact, atunci f este un omeomorfism.

10. Fie X un spațiu metric și $\delta : X \times \mathbb{R} \to X$ o aplicație continuă astfel încît:
1^0 $\forall\, x \in X$, $\delta(x,0) = x$;

2^0 $\forall\, x \in X$, $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$, $\delta(\delta(x,t_1),t_2) = \delta(x,t_1 + t_2)$. Să se arate că $\forall\, t \in \mathbb{R}$, aplicația $\tau_t : X \to X$, $x \mapsto \delta(x,t)$ este un omeomorfism.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. a) Limita se face pe componente și este $(1/2,1,0,1)$.
b) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (e^{\lambda}, 1)$; distanța este $(e^{\lambda} - 1)^2 + (e^{-\lambda} - 1)^2$ și problema revine la a determina minimul funcției de o variabilă $f(\lambda) = e^{2\lambda} - 2e^{\lambda} + e^{-2\lambda} - 2e^{-\lambda}$.

2. Se verifică imediat D_1, D_2, D_3. Funcția $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ este bijectivă. Avem

$$d(x_{n+p},x_n) = |\operatorname{arctg}(n+p) - \operatorname{arctg} n| = |\operatorname{arctg} \frac{p}{1 + n(n+p)}| \leq \frac{p}{1 + n(n+p)} \leq \frac{1}{n}$$

deci șirul $x_n = n$ este Cauchy. Dacă ar exista $l \in \mathbb{R}$ astfel încît $x_n \to l$, ar rezulta că $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} l| = 0$, adică $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} l = 0$; absurd.

3. Aplicația $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ este bijectivă și se aplică exercițiul 2, luînd δ = distanța euclidiană pe intervalul $[-1,1]$. Se observă că φ și φ^{-1} sunt continue deci φ este un omeomorfism. Deoarece intervalul $[-1,1]$ este compact, rezultă că $\overline{\mathbb{R}}$ este compact. Dacă $0 < r < 1$, atunci bila $B(\infty,r)$ este tocmai intervalul $\left(\dfrac{1-r}{r}, \infty\right]$ etc.

4. a) $x = \dfrac{1}{x^2 + 12}$; luăm $X = [0,1]$ și $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 + 12}$. Se observă că φ este o contracție de coeficient $k = \dfrac{2}{169}$; se obține $\xi \approx 0{,}0833$.
b) $x = \dfrac{1}{3}(1 - e^{-x})$;
c) Ecuația se scrie $x = \dfrac{2{,}1}{x^4 + x^2}$ etc.

5. a) $d(\varphi(z),\varphi(z')) = |\varphi(z) - \varphi(z')| = |a(z - z')| = |a| \cdot d(z,z')$ și $k = |a|$;
b) ψ nu este o contracție (se obține $k \leq 1$ și nu $k < 1$); punctele fixe sunt punctele de pe dreapta D.

6. a) Fie $x \in X$. Deoarece A este densă, există un șir $a_n \to x$ cu $a_n \in A$. Atunci $f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = g(x)$ deci $f = g$.

b) Fie $K = \{a, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ şi $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ o acoperire deschisă. Deoarece $a \in K$, $\exists\, i_0$ astfel încît $a \in D_{i_0}$ şi toţi termenii şirului începînd de la un rang încolo aparţin la deschisul D_{i_0}. Aşadar, mulţimea K poate fi inclusă în reuniunea unui număr finit de deschişi D_i deci este compactă.

c) Un şir (x_n, x_n') este convergent în $X \times X' \Leftrightarrow (x_n)$ este convergent în X şi (x_n') în X'.

7. A_1 este închisă şi conexă; A_2 este deschisă şi conexă; A_3 este închisă, compactă şi conexă; A_4 este închisă, compactă şi conexă.

8. a) f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; apoi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ deci f este continuă şi în origine;

b) f este continuă în cele patru cadrane deschise şi în origine;

c) f este continuă în $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

9. Arătăm că aplicaţia $g = f^{-1} : Y \to X$ este continuă, adică întoarce închişi în închişi; dar dacă $F \subset X$ este un închis, atunci X fiind compact, rezultă că F este compact şi $g^{-1}(F) = f(F)$ rezultă compact deci închis în Y. Rezultă că g este continuă.

10. Aplicaţia τ_t este continuă (căci $x_n \to x$ implică $\delta(x_n,t) \to \delta(x,t)$ deci $\tau_t(x_n) \to \tau_t(x)$); apoi τ_t este bijectivă, avînd ca inversă τ_{-t}, iar această inversă este de asemenea continuă.

Acest exerciţiu este începutul teoriei sistemelor dinamice. Tripletul $(X,\mathbb{R},\delta)$ este numit un **sistem dinamic** în X; elementele lui X se numesc **stări**; dacă $x \in X$, atunci $\delta(x,t)$ es numeşte starea sistemului la momentul t dacă starea lui la momentul 0 era x. Funcţia δ se numeşte tranziţia de stări, iar τ_t tranziţia la momentul t. Pentru $x \in X$ fixată, aplicaţia $\mathbb{R} \to X$, $t \mapsto \delta(x,t)$ se numeşte **mişcarea** sistemului prin x, iar mulţimea $\{\delta(x,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ este **orbita** lui x.

LECŢIA A IV-A

SPAŢII VECTORIALE NORMATE, SERII DE FUNCŢII

INTRODUCERE

Spaţiile vectoriale normate (SVN) constituie cadrul natural pentru teoria seriilor, deoarece în orice SVN se pot face sume finite şi treceri la limită. Totodată se dezvoltă concepte importante de analiză liniară şi de teoria operatorilor, care îl interesează nu numai pe matematician, dar şi pe inginer. Noţiunea de spaţiu vectorial normat a fost introdusă de matematicianul american N. WIENER (1894 - 1970) şi se dovedeşte în continuare un concept inepuizabil. Bineînţeles, noi ne restrîngem la prezentarea cîtorva elemente de bază, care permit familiarizarea cu noul domeniu desprins din Analiza matematică şi anume Analiza funcţională.

Şirurile şi seriile de funcţii constituie un instrument esenţial în "jocul cu infinitul", în formule aproximative dar cu evaluarea erorii. Seriile de puteri şi seriile trigonometrice reprezintă cazuri particulare şi merită un studiu separat.

1. Normă, spaţiu Banach

În cele ce urmează, prin $\mathcal{K}$ vom desemna fie corpul $\mathbb{R}$, fie corpul $\mathbb{C}$.

Definiţia IV. 1. Fie E un $\mathcal{K}$- spaţiu vectorial. O aplicaţie $\|\cdot\| : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ se numeşte **normă** pe E dacă:

N_1. $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\|x\| \geq 0$ şi $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivitate);

N_2. $\forall\, x,y \in \mathrm{E}$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului);

N_3. $\forall\, \alpha \in \mathcal{K}$, $x \in \mathrm{E}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (omogenitate).

Un spaţiu vectorial pe care este fixată o normă se numeşte **spaţiu vectorial normat** (SVN).

Ca o consecinţă, pentru orice $x_1, ..., x_n \in$ E avem

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \text{ şi } \forall\, x,y \in E,\ |\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|.$$

În primul caz se raţionează prin inducţie. Apoi

$$\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \text{ deci } \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$$

schimbînd x cu y avem $\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|$.

EXEMPLUL 1. Fie $\mathcal{K} = \mathbf{R}$, E $= \mathbf{R}^n$. Pentru orice $x \in$ E, $x = (x_1, ..., x_n)$, se definesc

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Se verifică în fiecare caz în parte proprietăţile N_1, N_2, N_3 şi se obţin trei norme pe spaţiul $\mathbf{R}^n$ şi trei exemple de $\mathbf{R}$ - spaţiu vectorial normat.

EXEMPLUL 2. Fie $\mathcal{K} = \mathbf{C}$, E $= \mathbf{C}^n$. Pentru orice $z = (z_1, ..., z_n) \in$ E se definesc

$$\|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|,\ \|z\|_\infty = \max_i |z_i|,$$

definind norme pe spaţiul $\mathbf{C}^n$.

EXEMPLUL 3. Fie $\mathcal{K} = \mathbf{R}$. Definim

a) $l_1 = \left\{x = (x_n)_{n\ge 0} \mid x_n \in \mathbf{R},\ \forall n \text{ şi seria } \sum_{n\ge 0} |x_n| \text{ este C}\right\}$;

l_1 este un SVN, relativ la norma definită prin

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

b) $l_2 = \left\{x = (x_n)_{n\ge 0} \mid x_n \in \mathbf{R},\ \forall n \text{ şi seria } \sum_{n\ge 0} x_n^2 \text{ este C}\right\}$;

l_2 este un SVN relativ la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) $l_\infty = \{x = (x_n)_{n\ge 0} \mid x_n \in \mathbf{R},\ \forall n \text{ şi } x \text{ este un şir mărginit}\}$;

Spaţiul l_∞ este un SVN real relativ la norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$. (Operaţiile în a, b, c, sunt cele naturale).

Exemple analoage se construiesc peste corpul $\mathcal{K} = \mathbf{C}$.

EXEMPLUL 4. Fie A o mulţime nevidă şi E $= \mathcal{M}(A)$ mulţimea funcţiilor mărginite $A \to \mathbf{R}$. Pentru orice $f \in$ E, **norma-sup** este definită prin

$$\|f\| = \sup_{x\in A} |f(x)|.$$

Se verifică N_1, N_2, N_3 şi $\mathcal{M}(A)$ este un SNV real relativ la norma-sup.

EXEMPLUL 5. Dacă X este un spaţiu metric compact, notăm cu $C(X)$ mulţimea funcţiilor continue $X \to \mathbf{R}$; orice astfel de funcţie este mărginită deci $C(X)$ este un subspaţiu al lui $\mathcal{M}(X)$ şi în plus, $C(X)$ este un SVN real relativ la norma-sup. În cazul cînd $X = [a, b]$, notăm $C[a, b]$ în loc de $C([a, b])$, mulţimea funcţiilor continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$; pentru orice $f \in C[a, b]$, definim

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

şi se obţine astfel o altă normă pe spaţiul $C[a, b]$, în afara normei-sup.

Revenim la ca cazul general şi fie (E, $\|\cdot\|$) un spaţiu vectorial normat peste $\mathcal{K}$. Pentru orice $x, y \in$ E punem $d(x,y) = \|x-y\|$ şi în acest mod se defineşte o distanţă pe E. Aşadar, **orice SVN este în mod natural un spaţiu metric** (reciproc, nu; de exemplu $\mathbf{Q}$ nu este nici măcar $\mathbf{R}$ - spaţiu vectorial, deşi este spaţiu metric relativ la distanţa euclidiană $d(x,y) = |x-y|$). Elementele unui SVN se numesc vectori, sau după caz, puncte.
În orice SVN există un punct remarcabil, originea 0 şi norma oricărui vector x este tocmai distanţa de la origine la x, anume $\|x\| = \|x-0\| = d(x,0) = d(0,x)$. Fie E un $\mathcal{K}$ - spaţiu vectorial normat; pentru un şir $(x_n)_{n\ge 0}$ de puncte din E avem $x_n \to x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Definiţia IV. 2. Un $\mathcal{K}$ - spaţiu vectorial normat se numeşte **spaţiu Banach** dacă el este complet (adică orice şir Cauchy este convergent).

EXEMPLUL 1. $\mathbf{R}^n$ este spaţiu Banach (relativ la norma $\|\cdot\|_2$); similar pentru $\mathbf{C}^n$. Argumentul îl constituie teorema III. 1. a).

EXEMPLUL 2. Se poate demonstra că l_1, l_2, l_∞ sunt spaţii Banach.

EXEMPLUL 3. Pentru orice spaţiu metric X, spaţiul $\mathcal{M}(X)$ este Banach relativ la norma-sup (conform teoremei III. 1. b)).

TEOREMA IV. 1. Fie E un $\mathcal{K}$ - spaţiu vectorial normat.

a) Dacă $x_n \to x$, $y_n \to y$ (în E) şi $\alpha_n \to \alpha$ (în $\mathcal{H}$), atunci $x_n + y_n \to x + y$ şi $\alpha_n x_n \to \alpha x$ în E.
b) Aplicaţia $N : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ este uniform continuă.
c) Pentru orice $x \in E$ şi $r > 0$, avem $\overline{B(x,r)} = B'(x,r)$.
d) O submulţime $A \subset E$ este mărginită $\Leftrightarrow$ mulţimea $\{\|x\| ; x \in A\}$ este mărginită în $\mathbb{R}$.

DEMONSTRAŢIE. a) Este suficient de observat că

$\|x_n + y_n - x - y\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$ şi că

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \le |\alpha_n| \, \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \, \|x\|$$

şi să aplicăm lema cleştelui.
b) $| \, \|x\| - \|y\| \, | \le \|x - y\|$ etc.
c) Fie $y \in B'(x,r)$ cu $\|y - x\| \le r$ şi $(\alpha_n)_n$, $0 < \alpha_n < 1$, $\forall\, n \in N$, cu $\alpha_n \to 1$. Atunci $y_n = x + \alpha_n(y - x) \in B(x,r)$ şi $y_n \to y$ deci $y \in \overline{B(x,r)}$ etc.

Fie E un SVN şi $(a_n)_{n \ge 0}$ un şir de elemente din E. Se defineşte şirul $(s_n)_{n \ge 0}$ al sumelor parţiale, $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Seria $\sum_{n \ge 0} a_n$ se zice **convergentă, cu suma** s ($s \in E$) dacă $s_n \to s$, adică $\lim_{n \to \infty} \|a_0 + a_1 + \ldots + a_n - s\| = 0$. În acest caz, $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$. Seria $\sum_{n \ge 0} a_n$ se zice **absolut convergentă** (AC) dacă seria de numere reale şi pozitive $\sum_{n \ge 0} \|a_n\|$ este C.

TEOREMA IV. 2. Într-un spaţiu Banach E, orice serie AC este C.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\sum_{n \ge 0} a_n$ presupusă AC şi $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece seria $\sum_{n \ge 0} \|a_n\|$ este C, rezultă că există $N(\varepsilon)$ astfel încît $\forall n \ge N(\varepsilon)$, $(\forall) p \ge 1$, $\|a_{n+1}\| + \ldots + \|a_{n+p}\| < \varepsilon$. Dar atunci $\|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\| < \varepsilon$ adică $\|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon$. Deci şirul $(s_n)_{n \ge 0}$ este Cauchy şi cum E este complet, şirul $(s_n)_{n \ge 0}$ rezultă convergent, adică seria $\sum_{n \ge 0} a_n$ este C.

2. Şiruri şi serii de funcţii

Fie A o mulţime nevidă, $(f_n)_{n \ge 0}$ un şir de funcţii $A \to \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o altă funcţie. Rezultatele rămîn valabile şi în cazul funcţiilor cu valori complexe.

Definiţia IV. 3. Se spune că şirul $(f_n)_{n \ge 0}$ este **punctual** (sau **simplu**) **convergent pe** A **către** f şi se scrie $f_n \xrightarrow{PC} f$ dacă $\forall x_0 \in A$, $f_n(x_0) \to f(x_0)$.
Şirul $(f_n)_{n \ge 0}$ se zice **uniform convergent pe A către** f şi se scrie $f_n \xrightarrow{UC} f$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall n \ge N(\varepsilon)$, $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, pentru orice $x \in A$.

TEOREMA IV. 3. Fie $(f_n)_{n \ge 0}$ un şir în $\mathcal{M}(A)$ şi $f \in \mathcal{M}(A)$.

a) Avem $f_n \xrightarrow{UC} f \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$ (pentru norma–sup), adică $f_n \to f$ în $\mathcal{M}(A)$.

b) Dacă şirul f_n este UC pe A, atunci f_n este PC pe A.

DEMONSTRAŢIE. a) Faptul că $f_n \xrightarrow{UC} f$ este echivalent cu aceea că $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall n \ge N(\varepsilon)$, $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, adică $\|f_n - f\| \le \varepsilon$ deci este echivalent cu $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$.

b) Dacă $f_n \xrightarrow{UC} f$, atunci $\forall\, x_0 \in A$ este îndeplinită, conform definiţiei IV. 3, următoarea condiţie: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall n \ge N(\varepsilon)$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \varepsilon$ deci $f_n(x_0) \to f(x_0)$. Aşadar, $f_n \xrightarrow{PC} f$.

Comentariu. Studiul PC şi UC se realizează după următoarea schemă:
Etapa I. Fiind dat şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, se calculează $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ şi se determină mulţimea $B \subset A$ a acelor x pentru care această limită există şi este finită.
Etapa a II-a. Rezultă că $f_n \xrightarrow{PC} f$ pe B. Se calculează $\varepsilon_n = \|f_n - f\| = \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)|$, folosind eventual tabloul de variaţie al funcţiei $f_n(x) - f(x)$ pe mulţimea B.

Etapa a III-a. Dacă $\varepsilon_n \to 0$ atunci $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe B. Dacă $\varepsilon_n \not\to 0$, convergenţa nu este uniformă.

În cazul cînd $A = [a,b]$, se poate da o interpretare geometrică sugestivă: faptul că $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe $[a,b]$ revine la aceea că $\forall \varepsilon > 0$, în "tubul" delimitat de graficele funcţiilor $f - \varepsilon, f + \varepsilon$, începînd de la un anumit rang sunt situate toate graficele funcţiilor f_n.

EXEMPLUL 1. Fie $A = [0,1)$ şi $f_n(x) = x^n, n \geq 1$. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pentru orice $x \in A$ deci $f_n \overset{PC}{\to} f$ pe A. Apoi $\|f_n - 0\| = \sup |x^n| = 1 \not\to 0$. Deci f_n nu este UC pe A. Dar $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe orice interval $B = [0,r]$ cu $0 < r < 1$, deoarece în acest caz, $\|f_n - 0\| = \sup |x^n| = r^n \to 0$.

EXEMPLUL 2. Fie $A = [-2,2]$ şi $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n+1}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, $\forall x \in A$ şi

$$\|f_n - 1\| = \sup_{x\in A} \left|\frac{x+n}{n+1} - 1\right| = \sup_{x\in A} \frac{|x-1|}{n+1} = \frac{3}{n+1} \to 0 \text{ deci } f_n \overset{UC}{\to} 1 \text{ pe } A.$$

O problemă importantă o constituie transferul de proprietăţi de la un şir de funcţii la funcţia limită. În acest sens, are loc

TEOREMA IV. 4. Fie X un spaţiu metric şi $f_n, f : X \to \mathbb{R}$. Dacă $\forall n \geq 0, f_n$ sunt continue şi dacă $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe X, atunci f este continuă.

DEMONSTRAŢIE. Avem de arătat că f este continuă în orice punct $a \in X$. Fie $x_n \to a$ deci trebuie arătat că $f(x_n) \to f(a)$. Fixăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe X pentru $p \to \infty$, există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încît $\forall p \geq N$, $|f_p(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}, \forall x \in X$; în particular, $|f_N(x_n) - f(x_n)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ şi $|f_N(a) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

În fine, deoarece funcţia f_N este continuă în a, rezultă că $f_N(x_n) \to f_N(a)$ deci pentru orice n suficient de mare, $|f_N(x_n) - f_N(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Atunci pentru orice n de la un rang încolo, scriind că

$$f(x_n) - f(a) = [f(x_n) - f_N(x_n)] + [f_N(x_n) - f_N(a)] + [f_N(a) - f(a)],$$

rezultă $|f(x_n) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Ca atare, $f(x_n) \to f(a)$.

TEOREMA IV. 5. Dacă X este un spaţiu metric compact, atunci spaţiul $C(X)$ al funcţiilor continue $X \to \mathbb{R}$ este un spaţiu Banach, relativ la norma–sup.

DEMONSTRAŢIE. Evident $C(X) \subset \mathcal{M}(X)$, deoarece X este compact. Dacă $(f_n)_{n\geq 0}$ este un şir Cauchy în $C(X)$, atunci el este şir Cauchy în $\mathcal{M}(X)$, care este spaţiu metric complet (relativ la "sup"). Rezultă că există $f \in \mathcal{M}(X)$ astfel încît $f_n \to f$ relativ la norma-sup. Conform teoremei IV.3 a), aceasta înseamnă că $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe X. Funcţiile f_n fiind continue pe X, rezultă că f este continuă şi ca atare $f_n \to f$ în $C(X)$. Deci spaţiul $C(X)$ este complet.

TEOREMA IV. 6. a) Dacă $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ este un şir de funcţii continue şi dacă $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe $[a,b]$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n).$$

b) Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii $[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, cu derivată continuă. Fie f,g funcţii mărginite $[a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f_n \overset{PC}{\to} f$ şi $f_n' \overset{UC}{\to} g$ pe intervalul $[a,b]$, atunci f este derivabilă pe $[a,b]$ şi $f' = g$, adică $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

DEMONSTRAŢIE. a) Mai întîi să observăm că

$$0 \leq \left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \|f_n - f\|\,dx = \|f_n - f\|(b-a).$$

Deoarece $f_n \overset{UC}{\to} f$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

(Vom arăta că această parte a teoremei are loc în condiţii mai generale, anume este suficient să presupunem că funcţiile f_n sunt integrabile Riemann).

b) Fie x un punct fixat arbitrar din intervalul $[a,b]$. Conform formulei Leibniz-Newton, avem $\forall n \geq 0$,

$$\int_a^b f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a)$$

şi făcînd $n \to \infty$, deoarece $f_n \xrightarrow{PC} f$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = f(x) - f(a).$$

Dar $f_n' \xrightarrow{UC} g$ şi aplicînd a), rezultă că $\forall\, x \in [a,b]$,

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a).$$

Deoarece f_n' sunt continue pe $[a,b]$, atunci aplicînd teorema IV. 5, rezultă că g este continuă. Atunci funcţia f rezultă derivabilă şi în plus, $f'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.
(Am folosit următoarea teoremă din liceu: Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi definim $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, atunci F este derivabilă pe intervalul $[a,b]$ şi în plus, $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Această teoremă este atribuită lui I. BARROW, 1630 - 1677, profesorul marelui I. NEWTON, 1643 - 1727).

Trecem acum la considerarea seriilor de funcţii.

Definiţia IV. 4. Fie A o mulţime nevidă şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii, $s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$, $n \ge 0$.
Seria de funcţii $\sum_{n\ge 0} f_n$ se zice **punctual convergentă (PC) pe A** dacă şirul $(s_n)_{n\ge 0}$ este PC; în acest caz, **suma** seriei este $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ şi se scrie $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $\forall\, x \in A$.

Seria de funcţii $\sum_{n\ge 0} f_n$ se zice **uniform convergentă (UC) pe A** dacă este PC pe A cu suma s şi şirul $s_n \xrightarrow{UC} s$ pe A.

Orice serie UC este PC (nu şi reciproc). O problemă principală este aceea

de a indica ce proprietăţi comune funcţiilor f_n, termeni ai seriei, se transferă sumei seriei.

TEOREMA IV. 7. Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii.
a) Dacă f_n sunt continue şi seria $\sum_{n\ge 0} f_n$ este UC pe A cu suma s, atunci s este continuă pe $[a,b]$; în plus,

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx, \text{ adică } \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

(Deci seriile UC de funcţii continue pot fi integrate termen cu termen).
b) Dacă seria $\sum_{n\ge 0} f_n$ este PC, f_n sunt derivabile pe $[a,b]$ cu derivata continuă şi $\sum_{n\ge 0} f_n'$ este UC, atunci suma s este derivabilă pe $[a,b]$ şi în plus, $s' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$, adică $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ (se mai spune că seria $\sum_{n\ge 0} f_n$ poate fi derivată termen cu termen).

Demonstraţie. a) Conform ipotezei, punînd $s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$, $n \ge 0$, avem $s_n \xrightarrow{UC} s$ pe $[a,b]$ şi aplicînd teorema IV. 5, rezultă că s este continuă. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \int_a^b s, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} [\int_a^b f_0 + \int_a^b f_1 + \ldots + \int_a^b f_n] = \int_a^b s,$$

deci seria $\sum_{n\ge 0} \int_a^b f_n$ este C, cu suma $\int_a^b s$.

b) Funcţiile s_n sunt derivabile cu derivată continuă şi în plus, $s_n \xrightarrow{PC} s$ pe $[a,b]$. Pentru seria $\sum_{n\ge 0} f_n'$ şirul sumelor parţiale este tocmai s_n' şi acest şir este UC către o funcţie g. Aplicînd teorema IV. 6, rezultă că s este derivabilă şi $s' = g$, adică $s' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

EXEMPLU. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, cu graficul din figură:

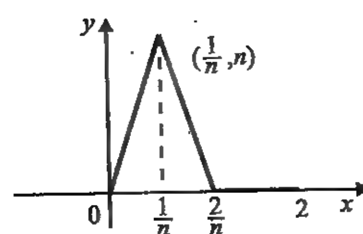


Fig. IV. 1

Evident, $\int_0^2 f_n = \int_0^2 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ pentru orice $n \geq 1$ deci $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n = 1$. Pe de altă parte, $f_n \xrightarrow{PC} 0$ (deoarece $\forall x \in [0,2], f_n(x) \to 0$). Aşadar $\int_0^2 (\lim f_n) = 0$ şi relaţia din teorema IV. 6 a) nu are loc. Motivul este că şirul (f_n) nu este UC către 0 pe [0,2]. Totodată, rezultă că seria $\sum_{n\geq 2} [f_n(x) - f_{n-1}(x)]$ nu poate fi integrată termen cu termen pe intervalul [0,2].

Din cele de mai sus, rezultă utilitatea unor criterii de UC pentru serii de funcţii şi în acest sens, are loc

TEOREMA IV. 8. (criteriul lui K. WEIERSTRASS, 1815 – 1897, **de convergenţă uniformă).** Fie o serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ de funcţii mărginite $f_n : A \to \mathbb{R}$ şi $\sum_{n\geq 0} a_n$ o serie C de numere reale pozitive. Dacă $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq a_n$ (începînd de la un rang N; deci $\forall n \geq N$), atunci seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este UC pe A.

DEMONSTRAŢIE. Avem $\|f_n\| \leq a_n$ pentru norma–sup deci conform teoremei II. 4 seria $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ rezultă C, adică seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este AC în spaţiul Banach $\mathcal{M}(A)$. Conform teoremei IV. 2, seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este C în $\mathcal{M}(A)$. Dar convergenţa unei serii în $\mathcal{M}(A)$ revine la convergenţa ei uniformă pe A (conform teoremei IV. 3 a) aplicată pentru şirul sumelor parţiale).

EXEMPLU. Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$ este UC pe $\mathbb{R}$, deoarece $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$ $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ şi seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este C.

3. Aplicaţii liniare şi continue între spaţii vectoriale normate

Fie E, F două SVN peste acelaşi corp $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $T : E \to F$ o aplicaţie $\mathcal{K}$-liniară; aşadar, $\forall x,y \in E$, $\forall \lambda \in \mathcal{K}$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ şi în particular, $T(0) = 0$. Vom nota uneori Tx în loc de $T(x)$, iar normele în cele două spaţii sunt notate la fel.

TEOREMA IV. 9. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:

a) T este continuă pe E;
b) T este continuă în $x = 0$ (originea lui E);
c) există $M > 0$ astfel încît $\forall x \in E$, $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.

DEMONSTRAŢIE. a) ⇒ b) este evident;

b) ⇒ c). Fie $\varepsilon = 1$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încît $\forall y \in E$, $\|y\| < \delta$, $\|T(y)\| \leq 1$. Luăm δ' astfel încît $0 < \delta' < \delta$. Fixăm $x \in E$ arbitrar, cu $x \neq 0$ şi fie $y = \frac{\delta'}{\|x\|}x$. Atunci $\|y\| = \delta'\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \delta' < \delta$ deci $\|T(y)\| \leq 1$ adică $\frac{\delta'}{\|x\|}\|T(x)\| \leq 1$ şi putem lua $M = \frac{1}{\delta'}$. Rezultă că $\forall x \in E$, $x \neq 0$ avem $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. Pentru $x = 0$ această inegalitate este evidentă.

c) ⇒ a). Fie $\forall x \in E$ fixat şi $x_n \to x$. Atunci

$$0 \leq \|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\|$$

şi lema cleştelui arată că $T(x_n) \to T(x)$.

COROLAR. Orice aplicaţie liniară continuă $T : E \to F$ este mărginită pe bila $B'(0,1)$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $\|x\| \leq 1$, rezultă $\|T(x)\| \leq M$ conform implicaţiei a) ⇒ c).

Comentariu. Dacă aplicaţia $T : E \to F$ este interpretată ca un "sistem intrare-ieşire" care fiecărei intrări x îi face să corespundă ieşirea $y = T(x)$, proprietatea de liniaritate a lui T exprimă "principiul suprapunerii efectelor" (conform căruia dacă $x_i \mapsto y_i$ şi $\lambda_i \in \mathcal{K}$ pentru $1 \le i \le p$, atunci intrării $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ îi corespunde ieşirea $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$, unde $y_i = T(x_i)$).
Dacă în plus, T este continuă, atunci $\exists\, M > 0$ astfel încît $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \le M$ pentru orice $x \in E, x \ne 0$. Deci M apare ca un majorant al rapoartelor între normele ieşirii şi intrării sistemului T. Numărul real $\|T\| = \inf\{ M > 0 \mid \forall x \in E,\ \|T(x)\| \le M\|x\| \}$ este numit **norma** lui T şi se interpretează ca un "grosisment" al sistemului, indicînd capacitatea sistemului de a amplifica intrările. Evident, $\forall x \in E,\ \|T(x)\| \le \|T\|\,\|x\|$.

Fie p spaţiul vectorial real al şirurilor nule da la un rang încolo; pentru orice $x = (x_n)_{n\ge0} \in p$, punem $\|x\| = \max_{n\ge0} |x_n|$. Aplicaţia $T : p \to \mathbb{R}$, $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este $\mathbb{R}$–liniară, dar nu este continuă (într-adevăr, altminteri $\exists\, M > 0$ astfel încît $\|x\| \le 1$ implică $|T(x)| \le M$. Alegem n natural astfel încît $n > M$ şi şirul $x = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n \text{ ori}},0,,\ldots)$ deci $\|x\| = 1$ şi $T(x) = n$; contradicţie).
Acest fenomen al existenţei de aplicaţii liniare necontinue este întîlnit numai în cazul spaţiilor infinit dimensionale.

Fie $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ şi E un spaţiu vectorial normat finit dimensional. Dacă $\dim_{\mathbb{R}} E = n$ şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui E, atunci $\forall x \in E$ există scalari unici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încît $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Vom considera aplicaţia $T : E \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_2)$; T este un izomorfism de spaţii vectoriale.

TEOREMA IV. 10. Fie T ca mai sus şi pe $\mathbb{R}$ să considerăm norma $\|\ \|_2$. Atunci T şi T^{-1} sînt continue (T este un omeomorfism).

DEMONSTRAŢIE. $T^{-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ şi folosind teorema IV. 1. rezultă continuitatea aplicaţiei T^{-1}.
Fie $S = \{\lambda \in \mathbb{R}^n ;\ \|\lambda\|_2 = 1\}$ şi $f : S \to \mathbb{R}$, $f(\lambda) = \|T^{-1}(\lambda)\|$ ($\|\ \|$ este norma în E). Aplicaţia f este evident continuă (compunere de aplicaţii continue) şi $f(\lambda) \ne 0$ $\forall \lambda \in S$. Mulţimea S fiind **compactă** deducem că $\inf_S f = \mu > 0$ (egalitatea este o notaţie). Dacă $x \in E$, $x \ne 0$ deducem $T(x) \ne 0$ şi deci $\frac{T(x)}{\|Tx\|_2} \in S$ deci $f\left(\frac{T(x)}{\|Tx\|_2}\right) \ge \mu$ de unde $\|Tx\|_2 \le \frac{1}{\mu}\|x\|$. Cum inegalitatea este evidentă pentru

$x = 0$ rezultă T continuă (teorema IV.9.)

Dacă E este un spaţiu vectorial real, două norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ se zic **echivalente** dacă există constante $\alpha > 0$, $\beta > 0$ astfel încît $\forall x \in E$, $\|x\|_1 \le \alpha\|x\|_2$ şi $\|x\|_2 \le \beta\|x\|_1$. În acest caz mulţimile deschise în spaţiile metrice asociate sunt aceleaşi (deci topologiile coincid). Din teorema de ma sus rezultă cu uşurinţă:

a) Orice două norme pe un spaţiu vectorial **finit dimensional** E sunt echivalente.

b) Fie E un spaţiu SVN real. Orice subspaţiu vectorial $F \subset E$ de dimensiune finită este închis în E.

DEMONSTRAŢIE. b) Cu norma indusă, F rezultă un subspaţiu Banach (izo cu $\mathbb{R}^n$, unde $n = \dim_{\mathbb{R}} F$); dacă $x_n \to x$ cu $x_n \in F$, atunci x_n este un şir Cauchy şi cum F complet, rezultă $x \in F$ deci F este închis.

TEOREMA IV. 11. Fixăm un interval $[a, b]$, $a < b$.

a) Luarea integralei $I : C^0[a,b] \to \mathbb{R}$, $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ este o aplicaţie liniară continuă.

b) Luarea derivatei $D : C^1[a,b] \to C^0[a,b]$, $D(f) = f'$ este o aplicaţie liniară discontinuă (pentru notaţii vezi pag. 99).
(Pe spaţiile vectoriale reale $C^0[a,b]$, $C^1[a,b]$ se consideră norma–sup).

DEMONSTRAŢIE. a) Pentru orice funcţie continuă $f \in C^0[a,b]$, avem $|I(f)| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b \|f\|\,dx = (b-a)\|f\|$ şi se verifică deci condiţia c) din teorema IV. 9 cu $M = b - a$.

b) Este suficient să arătăm că D este discontinuă în origine. Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin n(x-a)$, $n \ge 1$. Evident $\|f_n\| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ deci $f_n \to 0$ dar $\|f_n'\| = \sqrt{n} \to \infty$ deci $Df_n \not\to 0$.

Comentariu. Teorema IV. 11 explică de ce integrala este mai bine adaptată decît derivata, în aplicarea metodelor aproximative numerice. Anume, la variaţii mici ale lui f corespund variaţii mici pentru $I(f)$, în timp ce două funcţii derivabile pot fi "foarte

apropiate" relativ la distanţa-sup, dar derivatele lor să nu aibă aceeaşi proprietate (deci dacă $f \approx g$, nu rezultă că $f' \approx g'$).

Reluăm cazul general şi fie E, F două spaţii vectoriale normate peste $\mathcal{K}$. Vom nota cu $\mathcal{L}(E,F)$ $\mathcal{K}$-spaţiul vectorial al aplicaţiilor liniare şi continue de la E şi F. Pentru orice $T \in \mathcal{L}(E,F)$, se defineşte norma $\|T\| =$ cel mai mic $M \geq 0$ astfel încît $\forall x \in E$, $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. Se poate arăta uşor că

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} \|T(x)\|.$$

TEOREMA IV. 12. Dacă E, F sunt SVN şi F este spaţiu Banach, atunci $\mathcal{L}(E,F)$ este spaţiu Banach.

DEMONSTRAŢIE. Se verifică imediat că asocierea $T \mapsto \|T\|$ este o normă pe $\mathcal{L}(E,F)$ deci $\mathcal{L}(E,F)$ este un SVN. Rămîne să arătăm că $\mathcal{L}(E,F)$ este spaţiu Banach. Fie $(T_n)_{n\geq 0}$ un şir Cauchy în $\mathcal{L}(E,F)$. Deoarece $\forall x \in E$, $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\|$, rezultă că $\forall x \in E$ şirul $(T_n(x))_{n\geq 0}$ este Cauchy în F. Dar F este spaţiu complet deci şirul $(T_n(x))_{n\geq 0}$ este convergent în F şi definim $T: E \to F$ prin $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$. Aplicaţia T este evident liniară şi rămîne să arătăm că este continuă şi că $T_n \to T$ în $\mathcal{L}(E,F)$. Fie $\forall \varepsilon > 0$. Ştim că există $N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall m,n \geq N(\varepsilon)$, $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$ deci $\|T_m(x) - T_n(x)\| < \varepsilon\|x\|$ şi făcînd $m \to \infty$, $\|T(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$. Rezultă că $T_n - T \in \mathcal{L}(E,F)$ deci $T \in \mathcal{L}(E,F)$ şi în plus, $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, adică $T_n \to T$ în $\mathcal{L}(E,F)$.

COROLAR. Luînd $F = \mathcal{K}$, rezultă că pentru orice SVN E, spaţiul $\mathcal{L}(E,\mathcal{K})$ al funcţionalelor liniare şi continue este Banach.

OBSERVAŢIE. Un rezultat important, cunoscut ca **teorema Hahn-Banach** arată că spaţiul $\mathcal{L}(E,\mathcal{K})$ este "suficient de bogat". Anume, pentru $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ şi $M \subset E$ un subspaţiu vectorial al SVN real E şi $f: M \to \mathbb{R}$ este o funcţională liniară continuă (M avînd norma indusă), atunci există o funcţională liniară şi continuă $\tilde{f}: E \to \mathbb{R}$ astfel încît $\tilde{f}|M = f$ şi $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Această teoremă se extinde şi la cazul $\mathcal{K} = \mathbb{C}$. Nu dăm demonstraţia. Din această teoremă se pot deduce două consecinţe utile:

1) Fie E un SVN peste $\mathcal{K}$ şi $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Atunci există o funcţională liniară şi continuă $T: E \to \mathcal{K}$ de normă 1 astfel încît $T(x_0) = \|x_0\|$. (Se ia $M = \mathcal{K}x_0$ şi $f: M \to \mathbb{R}$, $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$).

2) E este un SVN peste $\mathcal{K}$ şi $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$, atunci există $T \in \mathcal{L}(E,\mathcal{K})$ astfel încît $T(x_1) \neq T(x_2)$ (se consideră $x_0 = x_2 - x_1$ şi se aplică proprietatea anterioară); se mai spune că T este o funcţională liniară continuă care **separă** x_1, x_2.

Dacă E este un SVN peste $\mathcal{K}$, se scrie $\mathcal{L}(E)$ în loc de $\mathcal{L}(E,E)$, iar elementele lui $\mathcal{L}(E)$ se numesc **operatori liniari şi continui** ai spaţiului E în el însuşi. Pentru orice $f,g \in \mathcal{L}(E)$ are sens compunerea $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$ şi $\mathcal{L}(E)$ este $\mathcal{K}$-algebră asociativă; în plus, $\|g \circ f\| \leq \|f\|\|g\|$.

4. Derivarea funcţiilor cu valori vectoriale. Formula lui Taylor şi aplicaţii

Presupunem $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $t_0 \in I$. Fixăm de asemenea un SVN real E şi o aplicaţie $f: I \to E$.

Definiţia IV. 5. Se spune că f este **derivabilă** în t_0 dacă există în E limita $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$, notată $f'(t_0)$ şi denumită **derivata lui** f **în** t_0.

Aceasta revine la faptul că $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît dacă $t \in I$ şi $0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$, atunci $\left\|\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0)\right\| < \varepsilon$.

Dacă f este derivabilă în orice punct din I, se spune că f este **derivabilă** pe I şi aplicaţia $f': I \to E$, $t \mapsto f'(t)$ se numeşte **derivata** funcţiei f.

OBSERVAŢII. 1) Notaţia t pentru variabila reală amintind de "timp" are justificare în originea cinematică a derivatei; de exemplu pentru $E = \mathbb{R}^3$, o funcţie $f: I \to E$ este o "mişcare" în spaţiu, iar $f'(t)$ este viteza la momentul t.

2) Dacă $E = V_3$, mulţimea vectorilor liberi din spaţiu, o aplicaţie $f: I \to V_3$ este numită un cîmp de vectori definit pe I. Dacă se alege un reper ortogonal Oxyz în spaţiu, de versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, atunci $\forall t \in I$, $f(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}$, cu componentele scalare $f_i: I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$.

3) Se definesc fără dificultate derivatele laterale şi se pot considera funcţii

date pe intervale nu neapărat deschise. Se extind de asemenea proprietăţile binecunoscute din liceu (unde $E = \mathbb{R}$); de exemplu:

–dacă f este derivabilă în t_0, atunci f este continuă în t_0;

–dacă $f,g : I \to E$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ şi există $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ pentru $t_0 \in I$, atunci există $(\alpha f + \beta g)'(t_0)$ şi este egal cu $\alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0)$;

–fie $f : I \to E$ şi $\alpha : I \to \mathbb{R}$ derivabile în $t_0 \in \mathbb{R}$; atunci produsul αf este funcţie derivabilă în t_0 şi $(\alpha f)'(t_0) = \alpha'(t_0)f(t_0) + \alpha(t_0)f'(t_0)$.

–dacă $\alpha : I \to J$ este derivabilă în $t_0 \in I$, cu valori în intervalul J şi $g : J \to E$ este derivabilă în $\alpha(t_0)$, atunci $g\circ\alpha$ este derivabilă în t_0 şi $(g\circ\alpha)'(t_0) = g'(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)$.

În cazul $E = \mathbb{R}^n$ are loc:

TEOREMA IV. 13. Fie $f : I \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_n)$; aplicaţia f este derivabilă într-un punct $t_0 \in I$ dacă şi numai dacă $f_1, ..., f_n$ sunt derivabile în t_0 şi în plus, $f'(t_0) = (f'_1(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $t \in I$, $t \neq t_0$ avem

$$\frac{1}{t-t_0}(f(t) - f(t_0)) = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, ..., \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0}\right) \in \mathbb{R}^n$$

şi trecerea la limită ($t \to t_0$) se face pe componente.

EXEMPLUL 1. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}^4$, $f(t) = (t^2, \ln t, 2t + 1, -3)$. Pentru orice $t \in (0,\infty)$ avem $f'(t) = (2t, 1/t, 2, 0)$.

EXEMPLUL 2. Fie $I = [0,2\pi]$, $E = \mathbb{R}^2$ şi $f : I \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$; f este derivabilă pe I şi $\forall t \in I$, $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Se observă că deşi $f(0) = f(2\pi)$, derivata nu se anulează în nici un punct. Deci teorema lui Lagrange a creşterilor finite nu se extinde la funcţii cu valori vectoriale, sub forma cunoscută din liceu. Vom folosi următoarea generalizare:

TEOREMA IV. 14. (J. DIEUDONNÉ, 1906-1993). Fie $I = [a,b]$, $f : I \to E$, $g : I \to \mathbb{R}$ continue şi derivabile la dreapta în orice punct $t \in I$. Dacă $\forall t \in I$, $\|f_d'(t)\| \leq g_d'(t)$, atunci $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

DEMONSTRAŢIE. Vom arăta că $\forall\, \varepsilon > 0$ şi $\forall\, t \in [a,b]$,

(*) $\quad \|f(t) - f(a)\| \leq \varepsilon(t - a) + g(t) - g(a)$.

Făcînd apoi $t = b$ şi ţinînd cont că ε este arbitrar, rezultă teorema.

Să considerăm mulţimea $I_\varepsilon = \{u \in [a,b] \mid \forall t \in [a,u]$ are loc inegalitatea (*)$\}$. Evident, I_ε este nevidă (conţine a) şi în plus, I_ε este un interval de extremitate a. Mai mult, din continuitatea funcţiilor f,g, rezultă $I_\varepsilon = [a,c]$ cu $c \leq b$ şi rămîne de arătat că $c = b$. Dacă prin absurd $c < b$, atunci $\exists h > 0$ astfel încît pentru $c < t \leq c + h$ să avem

$$\left\|\frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f_d'(c)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{g(t) - g(c)}{t - c} - g_d'(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deducem

$$\left\|\frac{f(t) - f(c)}{t - c}\right\| \leq \|f_d'(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq g_d'(c) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t) - g(c)}{t - c} + \varepsilon,$$

de unde $\|f(t) - f(c)\| \leq \varepsilon(t - c) + g(t) - g(c)$, pentru $c < t \leq c + h$.

Cum $c \in I_\varepsilon$, $\|f(c) - f(a)\| \leq \varepsilon(c - a) + g(c) - g(a)$ şi deci

$$\|f(t) - f(a)\| \leq \varepsilon(t - a) + g(t) - g(a) \text{ pentru } t \in [c, c + h],$$

rezultă că $c + h \in I_\varepsilon$, ceea ce contrazice faptul că $I_\varepsilon = [a,c]$. Aşadar, $c = b$ şi teorema este demonstrată.

OBSERVAŢIE. Este suficient ca ipotezele asupra f_d', g_d' să fie realizate pe intervalul deschis (a,b); în acest caz, se consideră $\alpha > a$, intervalul $[\alpha,b)$ şi apoi punem $\alpha \to a$ etc. Corolarul de mai jos arată legătura cu teorema clasică a creşterilor finite.

COROLAR. Fie $f : [a,b] \to E$ o funcţie continuă derivabilă la dreapta, astfel încît să existe $M > 0$ pentru care $\|f_d'(t)\| \leq M$, $\forall t \in (a,b)$. Atunci $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$.

DEMONSTRAŢIE. Se ia $g(t) = Mt$ şi se aplică teorema IV. 14.

Dacă $f : I \to E$ este o aplicaţie, se definesc prin inducţie derivatele de ordin superior ale lui f. Vom spune că f **este de clasă** C^p pe intervalul I şi scriem $f \in C^p(I)$, $p \in \mathbb{N}$ dacă pentru $p = 0$, f este continuă pe I şi pentru $p \geq 1$, $f^{(p-1)}$ este derivabilă, cu derivata $f^{(p)} : I \to E$ continuă pe I; funcţia f se zice **indefinit derivabilă** şi se scrie $f \in C^\infty(I)$ dacă $\forall p \in \mathbb{N}$, $f \in C^p(I)$. Dacă I nu este neapărat deschis, la extremităţi se consideră derivatele laterale.

Definiţia IV. 6. Fie $f : I \to E$ şi $t_0 \in I$ astfel încît să existe $f^{(n)}(t_0)$, $n \geq 1$ (aşadar $f, f', ..., f^{(n-1)}$ sunt derivabile în vecinătatea lui t_0 şi $f^{(n-1)}$ este derivabilă în t_0). În acest caz, se poate defini **polinomul lui** B. TAYLOR (1685 - 1731) **pentru** f **de grad** n (cu coeficienţi în E):

$$P_n(t_0,t,f) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + ... + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t - t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0).$$

De remarcat că $P_n : I \to E$, $t \mapsto P_n(t_0,t,f)$ are aceleaşi derivate cu f în punctul t_0, pînă la ordinul n inclusiv; anume

$$P_n(t_0,t_0,f) = f(t_0),\ P'_n(t_0,t_0,f) = f'(t_0), ...,\ P_n^{(n)}(t_0,t_0,f) = f^{(n)}(t_0).$$

Diferenţa $R_n(t_0,t,f) = f(t) - P_n(t_0,t,f)$ se numeşte **restul de ordin** n **al lui** f **în** t_0. **Formula Taylor** se scrie pentru $n \geq 1$ fixat astfel

$$f(t) = P_n(t_0,t,f) + R_n(t_0,t,f)$$

şi în practică avem o aproximare $f(t) \approx P_n(t_0,t,f)$, $\forall t \in I$, pentru care este necesară estimarea erorii absolute, adică $\|R_n(t_0,t,f)\|$. În acest sens are loc:

TEOREMA IV. 15. Fixăm $n \geq 1$ şi presupunem că $f \in C^n[a;b]$, iar pe (a,b) există $f^{(n+1)}$. Dacă există $\lambda > 0$ astfel încît $\forall t \in (a,b)$, $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq \lambda$, are loc următoarea estimare

$$\|R_n(a,b,f)\| \leq \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm funcţia $\varphi : [a,b] \to E$,

$$\varphi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).$$

Evident, f este continuă pe $[a,b]$, $\varphi(b) = 0$ şi $\varphi(a) = R_n(a,b,f)$. În plus, se vede imediat că $\forall t \in (a,b)$, $\varphi'(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$. Fie apoi $g(t) = -\lambda \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Funcţiile φ şi g satisfac condiţiile teoremei IV. 14 şi rezultă

$$\|R_n(a,b,f)\| = \|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq g(b) - g(a) = \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Există mai multe forme de exprimare mai sintetică a restului în formule de tip Taylor, care permit aproximarea funcţiilor prin polinoame, dar cu estimările erorii absolute:

I. Dacă pentru o funcţie $f : I \to E$, cu I interval deschis există $f^{(n)}(t_0)$, $t_0 \in I$, $n \geq 1$, atunci se demonstrează (de exemplu, prin inducţie după n şi folosind teorema IV. 14; pentru $n = 1$ este chiar definiţia derivatei) că

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0)}{(t-t_0)^n} = 0$$

şi notînd raportul cu $\frac{1}{n!}\rho(t)$, rezultă **formula Taylor-Young**:

$$\boxed{f(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\rho(t)}, \text{ unde } \lim_{t \to t_0} \rho(t) = 0.$$

II. Să considerăm cazul $E = \mathbf{R}$. Cu notaţiile din demonstraţia teoremei IV. 15, fie $\psi(t) = \varphi(t) - A\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ unde constanta $A \in \mathbf{R}$ poate fi determinată prin condiţia $\psi(a) = \psi(b)$. Deoarece $\psi(b) = 0$, rezultă $\psi(a) = 0$ deci $A = \frac{\varphi(a)(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}$.

Funcţiei $\psi : [a,b] \to \mathbf{R}$ i se poate aplica teorema clasică a lui Rolle, deci există $c \in (a,b)$ astfel încît $\psi'(c) = 0$. Dar $\psi'(t) = \varphi'(t) + \frac{A(b-t)^n}{n!} = \frac{(b-t)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(t))$ deci $A = f^{(n+1)}(c)$. În concluzie,

$$R_n(a,b,f) = \varphi(a) = A\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Se obţine astfel **formula Taylor cu restul Lagrange**:

$$f(b) = P_n(a,b,f) + R_n(a,b,f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),\ c \in (a,b).$$

Cu notaţii schimbate ($b \mapsto x$), să presupunem că $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^{n+1}, $n \geq 0$ pe intervalul deschis I şi fie $a \in I$. Atunci pentru orice $x \in I$, există un punct c între a şi x astfel încît

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}.$$

În aceleaşi condiţii, are loc formula următoare:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(u)\frac{(x-u)^n}{n!}\,du}$$

(numită **formula lui Taylor cu restul integral de ordin** n, $n \geq 0$. Demonstraţia se face prin inducţie după n. Pentru $n = 0$ avem de arătat că $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u)\,du$, ceea ce rezultă direct din formula Leibniz – Newton. Presupunem $n \geq 1$ şi formula adevărată pentru $n - 1$, şi o probăm pentru n; totul se reduce la a arăta că

$$\int_a^x f^{(n)}(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du - \int_a^x f^{(n+1)}(u)\frac{(x-u)^n}{n!}du = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dar primul membru este egal cu

$$\int_a^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}[nf^{(n)}(u)-(x-u)f^{(n+1)}(u)]\mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{1}{n!}\int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[(x-u)^n f^{(n)}(u)\right]\mathrm{d}u = -\frac{1}{n!}\left[(x-u)^n f^{(n)}(u)\right]\Big|_{u=a}^{u=x} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

CAZURI PARTICULARE.

a) Dacă P este o funcţie polinomială cu coeficienţi reali de grad n, atunci pentru orice $a,x \in \mathbb{R}$, avem $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, deoarece $P^{(n+1)}(u) = 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

b) Presupunem că $f : [-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ este o funcţie de clasă C^{n+1}. Atunci pentru orice $x \in (-\alpha,\alpha)$ există un punct c între 0 şi x astfel încît

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Aceasta se numeşte **formula lui** K. MAC LAURIN (1698 - 1746).

c) Dacă lui x i se dă o "creştere" Δx, diferenţa $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ se numeşte "creşterea" corespunzătoare a lui f. Dacă f este de clasă C^{n+1}, atunci în punctul curent x avem:

$$\Delta f = \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1},$$

cu c cuprins între x şi $x + \Delta x$. În această formulare este folosită formula Taylor în unele consideraţii fizice.

APLICAŢII.

1) Calculăm sin 33° cu aproximaţie $\leq 10^{-6}$. Conform formulei Taylor cu restul Lagrange ($n = 3$) avem:

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1!}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin c$$

cu c cuprins între x şi $x + h$. Luăm $x = 30° = \pi/6$, $h = 3° = \pi/60$. Deoarece

$$\left|\frac{h^4}{4!}\sin c\right| \leq \frac{h^4}{4!} = \frac{\pi^4}{60^4 4!} \leq 10^{-6}, \text{ rezultă că}$$

$$\sin 33^0 \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{60}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{2\cdot 60^2}\frac{1}{2} - \frac{\pi^3}{6\cdot 60^3}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}54464$$

Alcătuirea tabelelor uzuale trigonometrice şi de logaritmi s-a realizat esenţialmente prin utilizarea formulei Taylor şi interpolărilor.

2) Formula Taylor permite unele precizări în studiul funcţiilor reale iniţiat în liceu. O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 se numeşte **convexă** pe intervalul $[a,b]$ ("ţine apă") dacă $\forall x,x_0 \in [a,b]$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, adică graficul lui f este situat deasupra tangentei în oricare punct $(x_0,f(x_0))$ al graficului. Ţinînd cont de formula Taylor ($n = 1$): $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$ cu c situat între x şi x_0, rezultă că **dacă** $f'' \geq 0$ **pe** $[a,b]$, **atunci** f **este convexă şi reciproc.** Similar, f este concavă pe $[a,b] \Leftrightarrow -f$ convexă pe $[a,b] \Leftrightarrow f'' \leq 0$ pe $[a,b]$.

3) Fie $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^{n+1} şi $x_0 \in (a,b)$. Se spune că f şi g **au contact de ordin cel puţin** n **în** x_0 dacă

$$f(x_0) = g(x_0),\ f'(x_0) = g'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0),$$

adică au acelaşi polinom Taylor de grad n în x_0. Astfel, f,g au contact de ordin cel puţin 1 în $x_0 \Leftrightarrow$ graficele lor trec prin acelaşi punct de abscisă x_0 şi au aceeaşi tangentă acolo. Dacă f şi g au contact de ordin cel puţin 2 în x_0, se spune că graficele lor au aceeaşi **curbură** în x_0. Fiind dată o funcţie f de clasă C^2 în vecinătatea unui punct x_0 unde $f''(x_0) \neq 0$, atunci există şi este unic un cerc remarcabil trecînd prin $(x_0,f(x_0))$ şi avînd contact de ordin cel puţin 2 cu f în x_0, numit **cercul osculator** al lui f în x_0; se arată uşor că raza lui este

$R = \frac{(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}}{|f''(x_0)|}$, numită **raza de curbură** a lui f în x_0.

Dacă f este de clasă C^2 în vecinătatea lui x_0, avem aproximarea liniară

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) = P_1(x_0,x,f) \text{ şi aproximarea pătratică}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) = P_2(x_0,x,f)$$

care revine la a determina dreapta (tangenta) şi respectiv parabola avînd în $(x_0,f(x_0))$ un contact de ordin cel puţin 1 (respectiv 2) cu graficul lui f.

4) Precizarea punctelor de extrem, ale funcţiilor reale se poate face tot prin utilizarea formulei lui Taylor. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^n, $n \geq 2$ şi $x_0 \in (a,b)$ un punct astfel încît $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Atunci $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$, unde c este situat între x_0 şi x. Dacă n este impar, atunci diferenţa $f(x) - f(x_0)$ are semn variabil în orice vecinătate a lui

x_0, deci x_0 nu este punct extrem local pentru f (este punct de inflexiune). Dacă n este par şi $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci $f^{(n)}$ fiind continuă păstrează semnul "–" pe o vecinătate a lui x_0 unde $f(x) - f(x_0) \le 0$ şi x_0 este un punct de maxim local. Dacă n este par şi $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.

EXEMPLU. Fie $f(x) = (2x - \pi)^3 \cos x$ şi $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Avem $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ şi $f^{(4)}(x_0) = -192$ deci $n = 4$ şi x_0 este un punct de maxim local. Pentru $f(x) = x^3 e^x$ şi $x_0 = 0$ avem $f'(0) = f''(0) = 0$ şi $f'''(0) = 6 \ne 0$ deci $n = 3$ şi originea este punct de inflexiune.

5) Fie $I = [a,b]$ şi $\varphi : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2[a,b]$ cu $\varphi'(x) \ne 0$, $\forall x \in I$. Şirul $(x_n)_{n\ge0}$ de puncte presupuse din I, definit prin x_0 şi $x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$, $n \ge 0$ se numeşte **procedura Newton**, asociată lui φ şi lui x_0.

TEOREMA IV. 16. Dacă $\xi \in (a,b)$ este o soluţie a ecuaţiei $\varphi(x) = 0$ şi $\varphi'(\xi) \ne 0$, atunci există o vecinătate V a lui ξ, astfel încît $\forall x_0 \in V$, procedura Newton asociată lui φ şi lui x_0, converge către ξ.

DEMONSTRAŢIE. Deoarece φ' şi φ'' sunt continue pe I, ele îşi ating marginile, deci există $m > 0$, $M > 0$ astfel încît $\forall x \in I$, $|\varphi'(x)| \ge m$, $|\varphi''(x)| \le M$. Conform formulei Taylor cu rest integral, avem:

$$\varphi(x) = \varphi(x_n) + (x - x_n)\varphi'(x_n) + \int_{x_n}^{x} (x - u)\varphi''(u)\,du,\ \forall x \in I,\ \forall n \ge 0.$$

Pentru $x = \xi$ se obţine $0 = \varphi(x_n) + (\xi - x_n)\varphi(x_n) + \int_{x_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)\,du$.

Pe de altă parte, din definiţia şirului $(x_n)_{n\ge0}$, rezultă

$$\varphi(x_n) + (\xi - x_n)\varphi'(x_n) = (\xi - x_{n+1})\varphi'(x_n)$$

şi din ultimele două relaţii, deducem că

$$\forall n \ge 0,\ \xi - x_{n+1} = -\frac{1}{\varphi'(x_n)} \int_{x_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)\,du \text{ deci}$$

$$|\xi - x_{n+1}| = \frac{1}{|\varphi'(x_n)|} \left| \int_{x_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)\,du \right| \le \frac{M}{2m}(\xi - x_n)^2, \text{ ţinînd cont că}$$

$$\left| \int_{x_n}^{\xi} |\xi - t|\,dt \right| \le \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2.$$

Notînd $\delta = \frac{2m}{M}$, rezultă $|\xi - x_{n+1}| \le \frac{1}{\delta}(\xi - x_n)^2$, $\forall n \ge 0$. Luînd

$V = (\xi - \frac{\delta}{2}, \xi + \frac{\delta}{2})$ şi $x_0 \in V$, avem succesiv $|\xi - x_1| \le \frac{1}{\delta}|\xi - x_0|^2 < \frac{\delta}{4}$, $|\xi - x_2| \le \frac{1}{\delta}|\xi - x_1|^2 < \frac{\delta}{16}, \ldots,$ $|\xi - x_n| < \frac{\delta}{4^n}$ deci $x_n \to \xi$.

EXEMPLU. Calculăm $\xi = \sqrt[3]{2}$ prin procedura Newton. Luăm $\varphi(x) = x^3 - 2$, $I = [1,2]$ şi $x_0 = 2$. Atunci $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$ adică $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$, $n \ge 0$. Se obţin aproximaţiile succesive $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}296$; $x_3 = 1{,}2609$; $x_4 = 1{,}25994$; $x_5 = 1{,}259921$ etc. şi $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992$.

Procedura Newton poate fi uşor programată, cu intrările φ, φ', x_0, luînd ca un criteriu de oprire a algoritmului stabilitatea primelor cifre zecimale. Algoritmul este rapid convergent, dacă x_0 este ales în vecinătatea soluţiei căutate ξ. Relaţia $x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$ se obţine astfel: se consideră punctul $(x_n, \varphi(x_n))$ pe graficul lui φ; ecuaţia tangentei la grafic în acest punct este $y - \varphi(x_n) = \varphi'(x_n)(x - x_n)$ şi aceasta intersectează axa Ox în punctul de abscisă x_{n+1}. De aceea procedura Newton se mai numeşte "metoda tangentei".

5. Drumuri parametrizate

Definiţia IV. 7. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi E un SVN real. Se numeşte **drum parametrizat** definit pe I cu valori în E orice aplicaţie continuă $f : I \to E$.

EXEMPLUL 1. Se consideră un plan P şi un reper ortogonal xOy de versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ în P. Mulţimea $E = V_2$ a vectorilor plani cu suportul în P este un spaţiu vectorial real izomorf cu $\mathbb{R}^2$, asociind oricărui punct $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ vectorul $\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$.
Un **drum parametrizat** în P este o aplicaţie continuă $f : I \to V_2 \simeq \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \mathbf{v}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} \equiv (f_1(t), f_2(t))$, cu f_1, f_2 aplicaţii continue $I \to \mathbb{R}$. Relaţiile $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $t \in I$ se numesc **ecuaţiile parametrice** ale drumului parametrizat f. **Traiectoria (imaginea)** drumului este $\mathrm{Im}f = \{ f(t) \mid t \in I \} \subset P$.
Dacă $I = [a,b]$, atunci punctele $f(a)$, $f(b)$ se numesc **capetele** drumului f, iar dacă $f(a) = f(b)$, drumul se numeşte **închis**.
În mod similar se definesc drumuri parametrizate în spaţiu ca fiind

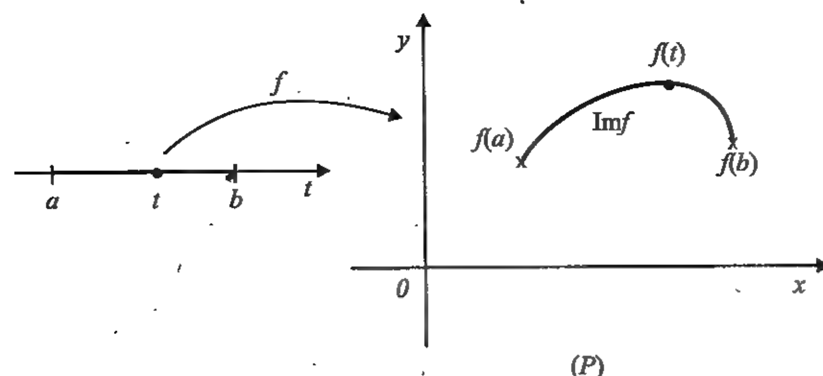


Fig. IV. 2.

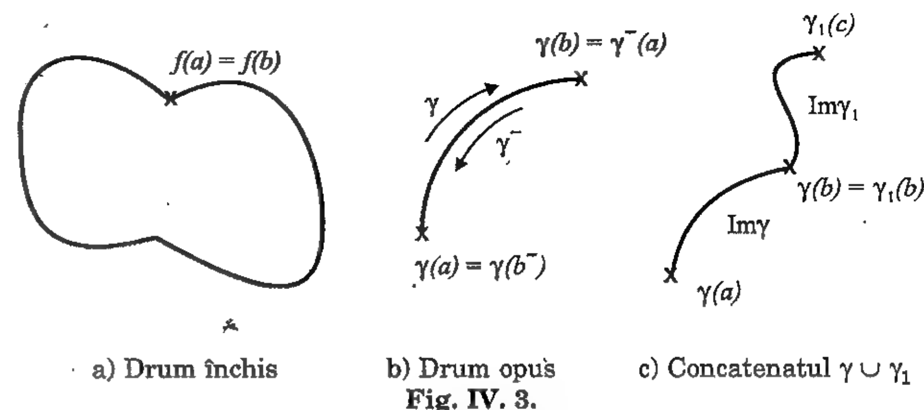
aplicaţii continue de forma $f : I \to V_3 \sim \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$; ecuaţiile parametrice ale drumului sunt $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, $t \in I$, iar traiectoria este Imf.

În notaţie vectorială, dacă se alege un reper Oxyz de versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ şi $\mathbb{R}^3 \sim V_3$ (identificînd orice punct $\mathbf{M} = (x,y,z)$ din $\mathbb{R}^3$ cu vectorul lui de poziţie $\mathbf{OM}$) şi dacă $\mathbf{v}, \mathbf{w} : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, atunci produsul scalar $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{w}(t)$ şi produsul vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w} : I \to V_3$, $t \to \mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t)$ sunt derivabile şi în plus, $\forall\, t \in I$, $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})'(t) = \mathbf{v}'(t) \bullet \mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{w}'(t)$ şi $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})'(t) = \mathbf{v}'(t) \times \mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}'(t)$.

EXEMPLUL 2. Drumurile parametrizate $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ şi $g : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (-x, \sqrt{1-x^2})$ sunt distincte, dar au aceeaşi imagine, anume semicercul $\{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, drumul $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos nt, \sin nt)$ este închis, avînd ca imagine cercul $\{x^2 + y^2 = 1\}$ (**circumferinţa unitate** parcursă de n ori în sens pozitiv).

EXEMPLUL 3. Drumul $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (R\cos t, R\sin t, c)$ cu $R > 0$ şi c constante are ca imagine cercul $\{x^2 + y^2 = R^2, z = c\}$, iar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (R\cos t, R\sin t, ht)$ este elicea cilindrică de pas h ($h > 0$), situată pe cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$.

Dacă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este un drum parametrizat, atunci drumul $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ se numeşte **opusul** lui γ; avem $\gamma^-(a) = \gamma(b)$ şi $\gamma^-(b) = \gamma(a)$ şi γ, γ^- au aceeaşi imagine. Dacă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ sunt două drumuri parametrizate în $E = \mathbb{R}^n$ astfel încît $\gamma(b) = \gamma_1(b)$, atunci se poate defini **concatenatul** $\gamma \cup \gamma_1$ ca drum $[a,c] \to \mathbb{R}^n$ care coincide cu γ pe $[a,b]$ şi cu γ_1 pe $[b,c]$. Imaginea lui $\gamma \cup \gamma_1$ este reuniunea imaginilor lui γ şi γ_1.



a) Drum închis b) Drum opus c) Concatenatul $\gamma \cup \gamma_1$

Fig. IV. 3.

Pentru aplicaţii, ipoteza de continuitate din definiţia IV. 7 este insuficientă. Ne situăm în cazul $E = \mathbb{R}^2$ şi presupunem că funcţia $f : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ este derivabilă, deci conform teoremei IV. 13, funcţiile $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile.
Fixăm $t_0 \in I$ astfel încît $f'(t_0) \neq 0$ şi fie $t \in I$, $t \neq t_0$. Notăm $\mathbf{M}_0 = f(t_0)$, $\mathbf{M} = f(t)$ punctele corespunzătoare pe Imf. Atunci vectorul

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \mathbf{OM} - \mathbf{OM}_0 = f(t) - f(t_0)$$

deci $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ este coliniar cu $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$. Făcînd $t \to t_0$, rezultă că $f'(t_0)$ este coliniar cu tangenta în $\mathbf{M}_0$ la traiectoria Imf. Ecuaţia tangentei în $\mathbf{M}_0$ la traiectoria Imf va fi $\dfrac{x - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \dfrac{y - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)}$. Aceste consideraţii se extind la cazul $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Definiţia IV. 8. Un drum parametrizat $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ se zice **neted** dacă este de clasă $C^1(I)$ şi $\forall\, t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$. Un drum **neted pe porţiuni** $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ este obţinut prin concatenarea unui număr finit de drumuri netede.
De exemplu, dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie reală de clasă $C^1(I)$, atunci $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ este un drum neted în $\mathbb{R}^2$, a cărui imagine este tocmai graficul lui f.
Două drumuri netede $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1 : J \to \mathbb{R}^n$ definite pe intervalele I, J se zic **echivalente cu aceeaşi orientare** (se scrie $\gamma \sim \gamma_1$) dacă există o funcţie $\varphi : I \to J$ (numită şi schimbare de parametru $u = \varphi(t)$) bijectivă de clasă $C^1(I)$, strict crescătoare, astfel încît φ^{-1} are aceleaşi proprietăţi şi $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma$ (adică $\gamma(t) = \gamma_1(u)$, $\forall\, t \in I$). Dacă $\gamma \sim \gamma_1$, atunci evident ele au aceeaşi imagine, Imγ = Imγ_1 şi "sunt parcurse în acelaşi sens".
De exemplu, pentru drumurile $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ şi $\gamma_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto (-u, \sqrt{1-u^2})$ avem $\gamma \sim \gamma_1$, deoarece definim $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$, $t \mapsto u = -\cos t$. Dar circumferinţa unitate parcursă pozitiv o dată sau de două

ori nu sunt drumuri echivalente, chiar dacă au aceeaşi imagine.

Comentariu. Presupunem că $n = 3$, I este un interval de timp şi că punctul $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ reprezintă poziţia unei particule la momentul t. Atunci $Im\gamma$ este traiectoria particulei, iar drumul γ reprezintă legea de parcurgere a traiectoriei. Dacă γ este neted de clasă C^2, atunci $\gamma'(t)$ reprezintă **vectorul-viteză** a particulei la momentul t, iar $\gamma''(t)$ **vectorul-acceleraţie**. Faptul că $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$ înseamnă că particula nu are puncte de repaos.

Dacă $I = [a,b]$, numărul real şi pozitiv $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ reprezintă **lungimea** traiectoriei $Im\gamma$ ("spaţiul = viteza × timpul"); aşadar,

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt.$$

Rămînem în cazul $n = 3$. **A da o curbă parametrizată** în spaţiu înseamnă a considera un drum parametrizat $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $t \to (x(t), y(t), z(t))$, presupus de clasă $C^3(I)$; dacă $\gamma \sim \gamma_1$, atunci γ şi γ_1 se consideră identice. Vom presupune că $\forall\, t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$ şi că $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$. Fixînd $t_0 \in I$, atunci pentru orice $t > t_0$ se defineşte lungimea arcului de curbă $Im\gamma$ între t_0 şi t ca fiind

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt, \text{ deci } s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Versorul tangentei în punctul curent t la curba γ este $\tau(t) = \dfrac{x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k}}{s'(t)}$; versorul lui $\tau'(t)$ se numeşte **versorul normalei principale** la γ şi este notat $\nu(t) = \dfrac{\tau'(t)}{\|\tau'(t)\|}$; în fine, $\beta(t) = \tau(t) \times \nu(t)$ se numeşte **versorul binormalei**. Triedrul $\{\tau, \nu, \beta\}$ depinzînd de t se numeşte **triedrul lui** FRENET (1801 - 1865) al curbei γ. Se pot stabili formule indicînd viteza de variaţie a versorilor triedrului Frenet în raport cu arcul; anume, există funcţii continue $R(s)$ şi respectiv $T(s)$, numite **raza de curbură** (respectiv **raza de torsiune**) ale lui γ în punctul t astfel încît $s = s(t)$ şi $\dfrac{d\tau}{ds} = \dfrac{1}{R}\nu$, $\dfrac{d\nu}{ds} = -\dfrac{1}{R}\tau + \dfrac{1}{T}\beta$, $\dfrac{d\beta}{ds} = -\dfrac{1}{T}\nu$.

Într-un anumit sens, R măsoară "abaterea" curbei γ de la o linie dreaptă (cînd $R = \infty$) iar T "abaterea" lui γ de la a fi o curbă cu imaginea situată într-un plan (cînd $T = \infty$).

EXEMPLU. Fie elicea cilindrică $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$, unde $r > 0$, $h > 0$ sunt constante. Ecuaţiile ei parametrice sunt $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = ht$, $t \in [0,2\pi]$; fixînd $t_0 = 0$, rezultă $s'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = r^2 + h^2$ şi lungimea

arcului de elice între punctele care corespund valorilor 0 şi $t > 0$, va fi $s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2}\ dt = t\sqrt{r^2 + h^2}$. Atunci versorii triedrului lui Frenet vor fi $\tau = \dfrac{\gamma'(t)}{s'(t)} = \dfrac{-r\sin t\,\boldsymbol{i} + r\cos t\,\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}}{\sqrt{r^2 + h^2}}$; ν = versorul lui $\tau'(t) = -\cos t\,\boldsymbol{i} - \sin t\,\boldsymbol{j}$ şi $\beta = \tau \times \nu = \dfrac{h\sin t\,\boldsymbol{i} - h\cos t\,\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}}{\sqrt{r^2 + h^2}}$, $\forall\, t \in [0,2\pi]$. În cazul elicei cilindrice razele R şi T sunt constante.

6. 10 exerciţii

1. Să se determine $x,y \in \mathbb{R}^2$ dacă pentru norma euclidiană avem $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

2. Să se studieze PC şi UC pentru şirurile de funcţii:

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx + 1}$ pe $A = (0,\infty)$ şi pe $B = [1,2]$.

b) $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{e^{nx} + 1}$ pe $A = [-1,1]$.

3. Se consideră seria $\sin^2 x(1 + \cos x + \cos^2 x + ..)$. Să se arate că este PC pe $\mathbb{R}$ şi să se determine suma ei $S(x)$. Studiaţi UC pe intervalul $[a, 2\pi - a]$ unde $a \in (0,\pi)$. Să se compare $S(0)$ şi $\lim\limits_{x \to 0} S(x)$.

4. Fie $E = C[0,2]$ cu normele "sup" şi $\|\cdot\|_1$ (unde $\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)|\, dt$, $\forall\, f \in E$). Să se arate că:

a) aceste norme nu sunt echivalente;

b) $(E, \|\cdot\|_1)$ nu este spaţiu Banach.

5. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ o matrice din $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Definim $\|A\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ şi $\|A\|_2 = (\sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}$. Să se arate că se obţin norme echivalente în spaţiul $E = M_{m,n}(\mathbb{R})$.

6. a) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ o funcţie de clasă C^1. Să se arate că există $M > 0$ astfel încît $\|f(b) - f(a)\| \le M(b - a)$

b) Să se justifice de ce pentru funcţii cu valori vectoriale nu se extind teoremele clasice ale lui Fermat şi Rolle.

7. Să se determine aproximările liniare şi pătratice pentru:

a) $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ în $x_0 = 0$.

b) $f(x) = x^3 + x\ln(x-1)$ în $x_0 = 2$.

8. a) Să se afle $R > 0$ astfel încît curbele $y = \ln(x^2+1)$ şi $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ să aibă un contact de ordin cel puţin 2 în $x_0 = 0$.

b) Să se arate că funcţiile $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \sin\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

au un contact de ordin infinit în origine, f are un minim dar g nu are extrem în origine.

9. a) Să se calculeze $\cos 55^0$ şi $\ln 1{,}1$ cu aproximaţie 10^{-3}.

b) Să se calculeze $\sqrt[7]{70}$ folosind procedura Newton.

c) Să se rezolve cu aproximaţie ecuaţiile $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ şi $x + 2\ln x = 2$.

10.a) Se consideră curba parametrizată $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$. Să se arate că este închisă şi să se calculeze versorii tangentei şi normalei la $Im\gamma$, în punctul $t = \frac{\pi}{4}$.

b) Să se arate că imaginea drumului parametrizat $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (t+1, t^2+2, 3t^2+1)$ este situată într-un plan şi să se calculeze lungimea lui γ.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Fie $x = (x_1,y_1)$, $y = (x_2,y_2)$. Atunci $\|x+y\| = ((x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|x\| = (x_1^2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|y\| = (x_2^2+y_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Relaţia din enunţ devine, după calcule, $x_1y_2 = x_2y_1$, ceea ce exprimă faptul că vectorii **x**,**y** sunt coliniari (au componentele proporţionale). De altfel, paralelogramul cu vîrfurile $O,x,y,x+y$ rezultă degenerat.

2. a) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ dacă $x \neq 0$ şi $f_n(0) = 0$. Deci $f_n \overset{PC}{\to} 1$ pe A şi pe B. Apoi $\|f_n - 1\|_A = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - 1| = \sup\limits_{x>0} \frac{1}{nx+1} = 1$ deci f_n nu este UC pe A. Dar $\|f_n - 1\|_B = \sup\limits_{x\in[1,2]} \frac{1}{nx+1} = \frac{1}{n+1} \to 0$ deci $f_n \overset{UC}{\to} 1$ pe B.

b) f_n sunt continue dar $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \end{cases}$ nu este continuă în $x = 0$ deci convergenţa nu poate fi uniformă.

3. Avem $S_n(x) = \sin^2 x(1 + \cos x + \ldots + \cos^n x)$. Pentru $\cos x = \pm 1$, atunci $\sin^2 x = 0$ şi $S_n(x) = 0$ iar pentru $\cos x \neq \pm 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$. Deci

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 + \cos x, & \cos x \neq \pm 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Seria este PC pe $\mathbf{R}$. Cum S nu este continuă, convergenţa nu este uniformă. Apoi $S(0) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 2$.

4. a) Dacă ar fi echivalente, ar exista o constantă $\alpha > 0$ astfel încît $\|f\| \leq \alpha \|f\|_1$ pentru orice $f \in E$. Să luăm $f(x) = e^{nx}$. Atunci $\|f\| = e^{2n}$ şi $\|f\|_1 = \int_0^2 e^{nt}dt = \frac{e^{2n}-1}{n}$ şi ar rezulta $e^{2n} \leq \alpha \cdot \frac{e^{2n}-1}{n}$, adică $n \leq \alpha \cdot \frac{e^{2n}-1}{e^{2n}} < \alpha$, absurd.

b) Să considerăm şirul $f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ din E. Acest şir este Cauchy şi converge la funcţia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ care nu aparţine la E.

5. Orice două norme pe un spaţiu vectorial real finit dimensional sunt echivalente.

6. a) Se poate aplica corolarul teoremei IV. 14 sau se raţionează pe componente, aplicînd teorema Lagrange.

b) Pentru funcţii cu valori în $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ nu se poate defini o noţiune convenabilă de extrem, deoarece $\mathbf{R}^n$ nu are o structură convenabilă de ordine. Apoi funcţia $f : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ avem $f(0) = f(2\pi)$ dar nu există $c \in (0,2\pi)$ astfel încît $f'(c) = 0$ deci teorema Rolle nu are loc pentru f.

7. a) $P_2(0,x,f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 2x$; $P_1(0,x,f) = 2x$ etc.

8. a) Pentru $f(x) = \ln(x^2+1)$, $g(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ se pun condiţiile $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$ şi se află R.

b) Avem $\forall\, n \geq 0$, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$. Apoi $f(x) \geq f(0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ deci $x = 0$ este punct de minim dar diferenţa $g(x) - g(0)$ nu are semn constant în nici o vecinătate a lui $x = 0$.

9. a) Se aplică formula lui Taylor.

b) Se rezolvă ecuaţia $x^7 = 70$; luăm $\varphi(x) = x^7 - 70$, $x_0 = 2$ şi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^7 - 70}{7x_n^6}, \quad n \geq 0 \text{ etc.}$$

c) Se aplică procedura Newton după ce se localizează soluţia dorită ξ pentru a alege convenabil x_0.

10. a) $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Apoi punînd $x(t) = \cos t$, $y(t) = 2\sin t$, versorul tangentei este $\tau(t) = \dfrac{x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$; un vector perpendicular pe vectorul de componente (α,β) este $(-\beta,\alpha)$.

b) Punînd $x = t + 1$, $y = t^2 + 2$, $z = 3t^2 + 1$, se observă că există un plan $Ax + By + Cz + D = 0$ care conţine orice punct din $\text{Im} f$, anume $3y - z - 5 = 0$; apoi $l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 36t^2}\, dt$ etc.

LECŢIA A V-A

SERII DE PUTERI, FUNCŢII ELEMENTARE

INTRODUCERE

În această lecţie se prezintă proprietăţile teoretice şi de calcul ale seriilor de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu coeficienţii a_n, $n \geq 0$ reali sau complecşi. Caracteristica principală a acestor serii este aceea că sumele parţiale sunt funcţii polinomiale deci practic cele mai simple funcţii (pentru calculul lor se fac doar adunări şi înmulţiri). Totodată seriile de puteri permit definirea riguroasă a funcţiilor elementare, incluzînd funcţia exponenţială (introdusă forţat în liceu şi cu demonstraţii incomplete) şi funcţiile trigonometrice, introduse în liceu prin inerente compromisuri geometrice (de exemplu definirea lui π).

Seriile de puteri reprezintă un mijloc natural şi maneabil de definire şi studiu al principalelor funcţii reale şi complexe; natural dacă ne gîndim la dezvoltările de tip Taylor şi maneabil pentru că, dincolo de convergenţă, "lucrul" cu seriile de puteri este asemănător celui cu polinoame. Am ales prezentarea seriilor de puteri cu coeficienţi în $\mathbb{C}$ atît cît permite dezvoltarea anterioară a acestor lecţii, deoarece numai în cadrul complex se evidenţiază legătura profundă între exponenţială şi funcţiile trigonometrice (descoperită de Euler) şi numai apelînd la variabila complexă se înţelege de ce dezvoltarea

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

are loc doar dacă $|x| < 1$. Această lecţie este şi o introducere la studiul funcţiilor analitice reale şi analitice complexe.

1. Proprietăţile de bază ale seriilor de puteri

Definiţia V. 1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir în $\mathbb{C}$ şi $a \in \mathbb{C}$. **O serie de puteri centrată în a, cu coeficienţi a_n** este o serie de funcţii de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots \qquad (1)$$

O astfel de serie se mai numeşte **serie întreagă** în variabila z, în jurul punctului $z = a$.

Vom presupune pentru simplitate că $a = 0$; trecerea la cazul cînd a este arbitrar se realizează imediat prin translaţia $z - a = w$. Considerăm deci o serie de puteri de forma $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ fixat, se obţine o serie numerică; pentru $z = 0$ aceasta este evident C.

EXEMPLUL 1. Seriile $\sum_{n\geq 0} z^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n\geq 1} n^n \cdot (z-1)^n$ sunt serii de puteri; dar seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} (n\cdot 2^x + 1)^n$ nu este o serie de puteri.

EXEMPLUL 2. Seria $\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{1-x}{3+x}\right)^n$ poate fi considerată serie de puteri punînd $\frac{1-x}{3+x} = y$.

TEOREMA V. 1. Pentru seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, notăm $\alpha = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ şi $R = 1/\alpha$ (cu convenţia că dacă $\alpha = 0$, atunci $R = \infty$ şi dacă $\alpha = \infty$, atunci $R = 0$).

a) Dacă $|z| < R$, atunci $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este AC;

b) Dacă $|z| > R$, atunci $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este D.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ fixat, avem

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \alpha|z|$$

şi aplicăm criteriul rădăcinii al lui Cauchy (teorema II. 8).

OBSERVAŢIE. Dacă $\forall\, n \geq N$ (N natural fixat), $a_n \neq 0$ şi există $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $R = l$ (vezi exerciţiul 6 lecţia a II–a).

Definiţia V. 2. Numărul real $R \geq 0$ (eventual şi $+\infty$) definit în teorema V. 1 se numeşte **raza de convergenţă** a seriei $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Pentru $R > 0$, discul $D_R = B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ se numeşte **discul de convergenţă** al seriei respective; în cazul $R = \infty$, $D_R = \mathbb{C}$.

În cazul cînd toţi coeficienţii a_n sunt reali, $R > 0$ şi $x \in \mathbb{R}$, seria de puteri reale $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ are **intervalul de convergenţă** $(-R,R)$.

TEOREMA V. 2. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ astfel încît şirul $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ să fie mărginit. Atunci:

a) $\forall\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < |z_0|$, seria $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este AC;

b) Pentru orice $0 < r < |z_0|$, seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este UC pe discul compact $B'(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

DEMONSTRAŢIE. Alegem $M > 0$ astfel încît $\forall\, n \geq 0$, $|a_n z_0^n| \leq M$ deci $|a_n| \leq \frac{M}{|z_0|^n}$.

a) Dacă $|z| < |z_0|$, atunci

$$\forall\, n \geq 0 \quad |a_n z^n| = |a_n| \cdot \left|\frac{z^n}{z_0^n} \cdot z_0^n\right| = |a_n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \cdot |z_0|^n \leq M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Deoarece $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, seria $\sum_{n\geq 0} M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ este C şi teorema II. 4 (criteriul comparaţiei) arată că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ este C.

b) Pentru $0 < r < |z_0|$ şi $|z| \leq r$, avem

$$\forall\, n \geq 0,\ |a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

Aplicînd criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă (teorema IV. 8), rezultă că seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este UC pe discul închis $|z| \leq r$.

COROLAR 1. Dacă seria $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ este C, $z_0 \neq 0$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este AC pentru $|z| < |z_0|$.

DEMONSTRAŢIE. Aşadar $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$ deci şirul $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

Combinînd teoremele V. 1, V. 2, se obţine următorul

COROLAR 2. Pentru orice serie de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ există şi este unic $R \in [0,\infty]$ astfel încît:
a) dacă $R = 0$, singurul punct de convergenţă al seriei este $z = a$;
b) dacă $0 < R < \infty$, atunci seria este AC în discul $|z-a| < R$ şi D pentru $|z-a| > R$; în plus seria este UC pe orice compact $K \subset B(a,R)$;
c) dacă $R = \infty$, seria este AC pentru orice $z \in \mathbb{C}$ şi UC pe orice compact $K \subset \mathbb{C}$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice compact $K \subset B(a,R)$ există $0 < r < R$ astfel încît K să fie conţinut în discul închis $|z-a| \leq r$ (de exemplu $r = \sup_{z\in K}|z-a|$). Apoi orice compact din $\mathbb{C}$ este mulţime mărginită deci conţinută într-un disc.

EXEMPLUL 1. Pentru seria $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$ avem $R = 0$.

EXEMPLUL 2. Seriile $\sum_{n\geq 0} z^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(z+i)^n}{n}$ au raza de convergenţă $R = 1$.

EXEMPLUL 3. Pentru seria $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ avem $a_n = \frac{1}{n!}$ şi $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$.

EXEMPLUL 4. Dacă $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sunt serii de puteri cu razele de convergenţă respectiv R_1, R_2 şi dacă $|a_n| < |b_n|$ pentru orice $n \geq N$, atunci $R_1 \geq R_2$.

Dacă $0 < R < \infty$, studiul de mai sus nu permite informaţii despre convergenţa seriei (1) în punctele z cu $|z-a| = R$, adică pe frontiera discului de convergenţă. În acest sens, demonstrăm următorul rezultat nebanal,

atribuit matematicianului austriac A. TAUBER (1866 – anul morţii necunoscut):

TEOREMA V. 3. Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri reale cu coeficienţi reali, cu raza de convergenţă $R = 1$. Presupunem că seria $\sum_{n\geq 0} a_n$ este C cu suma s. În aceste condiţii, seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este UC pe $[0,1]$ şi $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$.

DEMONSTRAŢIE. Mai întîi demonstrăm următoarea

LEMĂ. Dacă $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ şi $A \leq a_1 + \dots + a_k \leq B$ pentru orice k, $1 \leq k \leq n$, atunci $Ab_1 \leq a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq Bb_1$.

DEMONSTRAŢIA LEMEI. Fie $s_k = a_1 + \dots + a_k$, deci

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n = b_1s_1 + b_2(s_2 - s_1) + \dots + b_n(s_n - s_{n-1}) =$$

$$= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n \leq$$

$$\leq B(b_1 - b_2) + B(b_2 - b_3) + \dots + B(b_{n-1} - b_n) \leq Bb_1,$$

parantezele fiind pozitive. Se procedează analog pentru cealaltă inegalitate.

Fixăm acum $\varepsilon > 0$ arbitrar; conform criteriului general Cauchy (teorema II. 2), există $N(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\, n \geq N$, $\forall\, p \geq 1$, $|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Pentru orice $x \in [0,1]$ avem $x^n \geq x^{n+1} \geq \dots \geq x^{n+p}$ şi cum $-\varepsilon \leq a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon$, lema arată că $-\varepsilon x^n \leq a_nx^n + \dots + a_{n+p}x^{n+p} \leq \varepsilon x^n$ deci $|a_nx^n + \dots + a_{n+p}x^{n+p}| \leq \varepsilon x^n \leq \varepsilon$.

Notînd cu $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ rezultă că $|s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$ pentru orice $x \in [0,1]$, $n \geq N(\varepsilon)$, $p \geq 1$. Deci $d(s_n, s_{n+p}) \leq \varepsilon$, $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$, $p \geq 1$ adică şirul de funcţii $(s_n)_{n\geq 0}$ este Cauchy în spaţiul $\mathcal{M}[0,1]$; acesta fiind spaţiu metric complet, rezultă că s_n este un şir convergent, $s_n \to s$ în $\mathcal{M}[0,1]$, adică $s_n \xrightarrow{UC} s$ pe $[0,1]$. Deoarece s_n sunt funcţii continue, s rezultă continuă pe $[0,1]$ şi în particular în punctul $x = 1$ avem $\lim_{x\to 1} s(x) = s(1)$, adică $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = s$.



OBSERVAŢIE. Reciproca este falsă: dacă $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$ nu rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$, aşa cum arată exemplul seriei $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$. Cazul $x = -1$ este similar, iar cazul cînd raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ este R se reduce la cazul $R = 1$ punînd $x = Ry$.

Revenim la cazul general. Pentru o serie de puteri (complexe) $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ cu raza de convergenţă $R > 0$, se poate considera **funcţia - sumă** $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Aceasta rezultă **continuă în orice punct** $z_0 \in B(0,R)$; într-adevăr, alegem r astfel încît $|z_0| < r < R$ şi ştim că seria de funcţii continue $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ este UC pe $|z| \leq r$; atunci suma ei, adică $f(z)$ va fi continuă în $B'(0,R)$ deci şi în z_0. Pentru a obţine proprietăţi mai puternice ale sumelor de serii de puteri, introducem conceptul de $\mathbb{C}$ - derivabilitate (sau olomorfie).

Definiţia V. 3. Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $a \in \Omega$ şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă; se spune că f este **$\mathbb{C}$ - derivabilă** în punctul a dacă există în $\mathbb{C}$ limita $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$, notată $f'(a)$ şi numită **derivata lui f în a**. Dacă f este $\mathbb{C}$ - derivabilă în orice punct din Ω, se spune că f este **$\mathbb{C}$ - derivabilă** pe Ω (sau echivalent, **olomorfă**), iar funcţia $f' : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$ se numeşte **derivata** lui f pe Ω.

Comentariu. Deşi definiţia de mai sus este o extindere "cuvînt cu cuvînt" a definiţiei din cazul real, conceptul de $\mathbb{C}$ - derivabilitate este mai profund, cu proprietăţi mai speciale, decît cel de $\mathbb{R}$ - derivabilitate; astfel, se va vedea că o funcţie $\mathbb{C}$ - derivabilă pe Ω rezultă derivabilă de oricîte ori, ceea ce nu se întîmplă în cazul real (de exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este o dată derivabilă pe $\mathbb{R}$, dar nu de două ori). Raţiunea stă în faptul că în planul complex, o limită de forma $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ trebuie să fie independentă de infinitatea de direcţii după care z tinde către a, în timp ce pe dreapta reală, avem doar tinderea dinspre stînga sau dinspre dreapta. Deci este "mai dificil" pentru o funcţie complexă să fie derivabilă şi aceasta explică proprietăţile mai speciale ale $\mathbb{C}$ - derivabilităţii. Pe de altă parte, asemănarea formală evidentă cu cazul real face ca regulile uzuale de derivare (relativ la sumă, produs, cît, compunere

etc.) să rămînă nemodificate. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $n \geq 1$ întreg este $\mathbb{C}$ - derivabilă în orice punct $a \in \mathbb{C}$ şi $f'(a) = \lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^n - a^n}{z - a} = na^{n-1}$. Dacă $f,g : \Omega \to \mathbb{C}$ sunt $\mathbb{C}$ - derivabile în $a \in \Omega$, atunci fg este derivabil în a şi $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

TEOREMA V. 4. Fie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă $R > 0$.

Atunci funcţia sumă $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ este olomorfă în $B(0,R)$, cu derivata $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$. (Cu alte cuvinte, seriile de puteri se pot deriva termen cu termen în discul de convergenţă).

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, din teorema V. 1 rezultă că seriile $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} na_n z^{n-1}$ au aceeaşi rază de convergenţă. Pentru orice $n \geq 0$ şi $\forall z \in B(0,R)$ avem $f(z) = s_n(z) + r_n(z)$, unde $s_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $r_n(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$. Notăm $g(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$ şi fie $\forall a \in B(0,R)$ fixat. Alegem de asemenea ρ cu $|a| < \rho < R$. Atunci $\forall z \neq a$, $|z| < \rho$, avem

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - g(a) = \frac{s_n(z) - s_n(a)}{z - a} - s_n'(a) + s_n'(a) - g(a) + \frac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a}.$$

Dar $\dfrac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(z^{k-1} + z^{k-2}a + \ldots + a^{k-1})$ deci

$$\left|\frac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,\rho^{k-1},$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,\rho^{k-1} = 0$ (deoarece seria $\sum\limits_{k\geq 0} k\,|a_k|\,\rho^{k-1}$ este C, dat fiind că seria $\sum\limits_{n\geq 0} na_n z^{n-1}$ are raza de convergenţă R, iar $0 < \rho < R$). Există atunci $N_1(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall n \geq N_1(\varepsilon)$, $\left|\dfrac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, pentru $|z| < \rho$,

$z \neq a$. Pe de altă parte, există $N_2(\varepsilon)$ natural astfel încît $\forall\, n \geq N_2(\varepsilon)$, $|s_n'(a) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ şi în fine pentru orice întreg $n \geq 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel

încît pentru $0 < |z - a| < \delta$, $\left|\frac{s_n(z) - s_n(a)}{z - a} - s_n'(a)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. În definitiv, va rezulta

că

$$\left|\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - g(a)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \text{ pentru } 0 < |z - a| < \delta$$

adică $\lim\limits_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = g(a)$, deci $f'(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n a^{n-1}$.

COROLAR 1. Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ cu raza de convergenţă $R > 0$, funcţia sumă $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ este $\mathbb{C}$ – derivabilă de oricîte ori în $B(0,R)$ şi derivatele succesive se obţin prin derivarea termen cu termen.

În particular, pentru o serie de puteri reale (cu coeficienţi reali) $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergenţă $R > 0$, suma $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o funcţie de clasă C^∞ pe intervalul de convergenţă, iar derivatele ei se obţin prin derivarea termen cu termen. Avem $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ şi mai general, $\forall\, k \geq 0$ întreg $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}$; pentru $x = 0$, rezultă $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$. Acelaşi calcul are loc şi în cazul complex. Am demonstrat astfel:

COROLAR 2. Dacă $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ este o serie de puteri în jurul lui $z = 0$, cu raza de convergenţă $R > 0$ şi cu suma $f(z)$, atunci pentru orice întreg $k \geq 0$,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Evident, rezultatele de mai sus au loc pentru serii întregi în jurul oricărui punct $a \in \mathbb{C}$.

TEOREMA V. 5. (unicitatea dezvoltării în serie de puteri). Fie $a \in \mathbb{C}$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ pentru orice z dintr-o vecinătate V a punctului a. Atunci $\forall\, n \geq 0$, $a_n = b_n$.

DEMONSTRAŢIE. Notînd $c_n = a_n - b_n$, rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = 0$, pentru orice $z \in V$. Conform corolarului anterior, notînd cu $f : V \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 0$ (funcţia nulă), rezultă $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$, pentru orice $n \geq 0$, adică $a_n = b_n$.

În cazul real demonstrăm de asemenea următorul rezultat relativ la integrarea seriilor de puteri.

TEOREMA V. 6. Fie $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri reale cu raza de convergenţă $R > 0$ şi cu suma $f(x)$. Atunci pentru orice interval compact $[a,b]$ conţinut în $(-R,R)$, avem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n \mathrm{d}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

(Cu alte cuvinte, seriile de puteri se pot integra termen cu termen în intervalul de convergenţă).

DEMONSTRAŢIE. Seria de funcţii continue $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ este UC pe $[a,b]$, conform corolarului 2 al teoremei V. 2. Ea se poate integra termen cu termen conform teoremei IV. 7.

EXEMPLU. Avem $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}$ pentru orice $x \in (-1,1)$. Prin integrare rezultă $C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \ln(1+x)$, cu C constantă. Pentru $x = 0$ rezultă $C = 0$. Ca atare, are loc formula

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n},\ \forall\, x \in (-1,1).$$

Aplicînd teorema V. 3, rezultă $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, un fapt remarcabil.

2. Seria Taylor a unei funcţii indefinit derivabile

Definiţia V. 4. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^{∞} pe intervalul $[a,b]$, $a < b$ şi fie $x_0 \in (a,b)$ un punct fixat. Acestei perechi (f, x_0) i se poate asocia o serie de puteri centrată în punctul x_0, anume $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, numită **seria Taylor a lui** f **în jurul punctului** x_0.

Comentariu. Dar, în general, raza de convergenţă a seriei Taylor nu este strict pozitivă; mai mult, chiar dacă seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 este convergentă, se poate întîmpla ca suma ei să nu fie egală cu $f(x)$, adică funcţia care a generat-o. De exemplu, să considerăm funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 0 & \text{dacă } x \in [-1,0] \end{cases}$ şi $x_0 = 0$. În acest caz $\forall\, n \geq 0$, $f^{(n)}(0) = 0$ deci seria Taylor respectivă are toţi termenii nuli; ca atare este punctual convergentă pe $[-1,1]$, cu suma funcţia nulă (care nu coincide cu f).

Are loc totuşi următoarea

TEOREMA V. 7. (teorema de reprezentare a funcţiilor de clasă C^{∞} prin serii Taylor). Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ o funcţie indefinit derivabilă astfel încît să existe $M > 0$ cu proprietatea că $\forall\, n \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Atunci pentru un punct fixat $x_0 \in (a,b)$, seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 este uniform convergentă pe $[a,b]$, avînd ca sumă f, adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,\ \forall\, x \in [a,b].$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $(s_n(x))_{n \geq 0}$ şirul sumelor parţiale ale seriei Taylor respective deci $s_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Atunci conform formulei lui Taylor cu restul Lagrange (teorema IV. 14), rezultă $\forall\, n \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$

$$f(x) - s_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

cu ξ între x_0 şi x. Deci $\forall\, x \in [a,b]$, $\forall\, n \geq 0$,

$$|f(x) - s_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Rezultă pentru norma – sup, $0 \leq \|f - s_n\| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, pentru orice $n \geq 0$.

Observînd că $\lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (deoarece aplicînd criteriul raportului, se vede că seria $\sum_{n \geq 0} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ este C, deci termenul ei general tinde către zero). În concluzie, $\lim_{n \to 0} \|f - s_n\| = 0$, adică $s_n \overset{UC}{\to} f$.

Definiţia V. 5. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat; pentru orice întreg $n \geq 0$ punem

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{dacă } n \geq 1 \\ 1 & \text{dacă } n = 0 \end{cases}$$

Dacă α este un număr natural, atunci $\binom{\alpha}{n} = 0$ pentru orice $n > \alpha$ şi $\binom{\alpha}{n} = C_{\alpha}^{n}$ dacă $\alpha \geq n$. Seria de puteri reale $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$ se numeşte **seria binomială de exponent** α.

TEOREMA V. 8. Seria binomială $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ de exponent α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$) are raza de convergenţă $R = 1$ şi suma ei este egală cu $(1+x)^{\alpha}$ deci $\forall\, x \in (-1,1)$,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

DEMONSTRAŢIE. Raza de convergenţă este

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \binom{\alpha}{n} / \binom{\alpha}{n+1} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha - n} \right| = 1.$$

Notînd cu $f(x)$ suma seriei binomiale pe intervalul $(-1,1)$, rezultă că

$$\forall\, x \in (-1,1), \quad (1+x)f'(x) = (1+x)\left[\alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \ldots\right] = \alpha f(x),$$

după calcule imediate. Atunci $\left[\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}\right]' = 0$ adică $\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} = C$, constant, pe intervalul $(-1,1)$. Dar pentru $x = 0$ avem $f(0) = 1$ deci $C = 1$ şi ca atare, $\forall\, x \in (-1,1)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$.

EXEMPLUL 1. Pentru orice $x \in (-1,1)$ au loc următoarele remarcabile dezvoltări în serie în jurul originii:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots$$

EXEMPLUL 2. Deşi funcţia reală $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1+x^2)$ este definită pe întreg $\mathbb{R}$, dezvoltarea $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$ este valabilă doar pentru $x \in (-1,1)$. Raţiunea acestui fenomen se explică doar prin trecerea la variabilă complexă: avem $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots$ pentru $|z| < 1$, iar funcţia $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ nu este definită în punctele $\pm i$.

EXEMPLUL 3. Pentru o particulă cu masă m, masa de repaus m_0 şi viteză v, are loc relaţia $m = m_0/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$, unde c este viteza luminii. Energia cinetică a particulei este

$$E = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2((1-v^2/c^2)^{-1/2} - 1) = m_0c^2\left[\frac{1}{2}(v/c)^2 + \frac{3}{8}(v/c)^4 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

Aceste calcule sunt corecte dacă $0 \le v < c$; dacă $v \ll c$ se pot neglija toţi termenii dezvoltării cu excepţia primului şi se obţine $E \approx \frac{1}{2}m_0v^2$, adică formula din mecanica newtoniană.

Definiţia V. 6. O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$ deschis) se numeşte **$\mathbb{R}$ - analitică într-un punct** $a \in A$ dacă există $r > 0$ astfel încît în intervalul $(a - r, a + r)$ are loc o dezvoltare în serie de forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Funcţia f se zice **$\mathbb{R}$ - analitică pe** A dacă este astfel în orice punct din A.

Dacă f este $\mathbb{R}$ - analitică în vecinătatea lui a, atunci ea rezultă indefinit derivabilă şi în plus $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ pentru orice $n \ge 0$. Reciproca nu este adevărată, aşa cum arată exemplul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-1/x^2}$ dacă $x \ne 0$, $f(0) = 0$; în acest caz, $\forall\, n \ge 0$, $f^{(n)}(0) = 0$ şi dacă f ar fi analitică în punctul $a = 0$, ar rezulta că f este nulă pe o vecinătate a originii.

În cazul complex, $\mathbb{C}$ - analiticitatea se dovedeşte a fi echivalentă cu olomorfia, dar $\mathbb{R}$ - analiticitatea nu este echivalentă cu derivabilitatea.

3. Funcţii elementare

Definiţia V. 7. Seria de puteri complexe $\sum_{n \ge 0} \frac{z^n}{n!}$ are raza de convergenţă $R = \infty$ deci este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$; suma ei se numeşte **exponenţiala complexă** a lui z şi se notează

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

Dăm în continuare proprietăţile principale ale exponenţialei complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1) exp este olomorfă (deci şi continuă) în $\mathbb{C}$ şi $\exp' = \exp$. Demonstraţia rezultă din teorema V. 4.

2) $\exp(0) = 1$ şi $\exp(1) = e$. Evident, direct din (1).

3) $\forall\, a,b \in \mathbb{C}$, $\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$. Demonstraţia rezultă din teorema II. 11 relativ la produsul seriilor AC.

4) Avem $\lim_{z\to 0}\dfrac{\exp(z)-1-\frac{z}{1!}-\frac{z^2}{2!}-\ldots-\frac{z^n}{n!}}{z^{n+1}}=\dfrac{1}{(n+1)!}$. Aceasta rezultă din formula (1) de definiţie.

5) $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $\exp(z)\neq 0$, deoarece $\exp(z)\cdot\exp(-z)=\exp(0)=1$. Apoi

$$\exp(\overline{z})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{z}^n}{n!}=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}=\overline{\exp(z)}.$$

6) Considerînd grupurile comutative $(\mathbb{C},+,0)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot,1)$, aplicaţia $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ este un morfism de grupuri.

Vom scrie în continuare e^z în loc de $\exp(z)$. Trebuie observat că dacă $x\in\mathbb{R}$, atunci $e^x\in\mathbb{R}$ şi aplicaţia $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, $x\mapsto e^x$ este un morfism de la grupul aditiv al lui $\mathbb{R}$ la grupul multiplicativ al lui $\mathbb{R}^*$.

7) Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci evident $(e^x)'=e^x$ şi în plus $e^x>0$ (dacă $x>0$, aceasta rezultă din definiţia V. 6 şi dacă $x<0$, atunci $-x>0$ şi folosim faptul că $e^x\cdot e^{-x}=1$). Rezultă că funcţia $\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $x\mapsto e^x$ este strict crescătoare.

8) Dacă $x\geq 0$, atunci $e^x\geq 1$ şi dacă $x<0$, atunci $0<e^x<1$.

9) Avem $\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$ (deoarece pentru $x>0$ avem $e^x>1+x$) şi $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.

Atunci aplicaţia $\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ este bijectivă, continuă. Inversa ei se notează $\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ şi se numeşte **luarea logaritmului natural**. Dacă $a>0, a\neq 1$, se defineşte $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ şi $a^x=e^{x\ln a}$; se deduc imediat proprietăţile uzuale ale logaritmilor şi ale funcţiei exponenţiale în diverse baze. Scopul nostru nu este să ne întoarcem la materia învăţată în liceu ci să subliniem unele elementele de logică internă a dezvoltării noţiunilor de Analiză matematică.

10) Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $|e^{ix}|=1$. Într-adevăr, conform 5) e^{ix} şi e^{-ix} sunt conjugate deci $|e^{ix}|=|e^{-ix}|$ şi cum $e^{ix}\cdot e^{-ix}=1$, rezultă $|e^{ix}|\cdot|e^{-ix}|=1$ deci $|e^{ix}|=1$. Desigur, conform formulei (1)

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\ldots+\frac{(ix)^n}{n!}+\ldots.$$

Definim $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad(2)$$

$$\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad(3)$$

Evident, $\sin 0=0$, $\cos 0=1$. De asemenea, $\cos 2\approx 1-2^2/2!$ cu eroarea absolută $\leq 2^4/4!$, deci $\cos 2<0$. Totodată rezultă celebra **formulă a lui** EULER

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

Deoarece $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$, rezultă că $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\ \cos^2x+\sin^2x=1,\ |\cos x|\leq 1,\ |\sin x|\leq 1.$$

11) Avem $(\cos x)'=-\sin x$, $(\sin x)'=\cos x$, derivînd termen cu termen în formulele (2) şi (3). Seriile respective au raza de convergenţă $R=\infty$ deci sin, cos sunt funcţii $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de clasă C^∞.

12) Se demonstrează cu uşurinţă formulele de trigonometrie clasică de tipul $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$ etc.

13) Mulţimea $M=\{x>0\mid\cos x=0\}$ este nevidă, deoarece $\cos 0=1>0$ şi $\cos 2<0$, iar funcţia cos este continuă. Mulţimea M fiind minorată, există $m=\inf M$ şi cum M este închisă, rezultă că $m\in M$ deci m este cea mai mică soluţie strict pozitivă a ecuaţiei $\cos x=0$. Acum este un moment solemn, pentru că vi se dă prima definiţie riguroasă a numărului π, eliberată de compromisuri geometrice. Anume

$$\pi=2m,$$

deci $\cos(\pi/2)=0$ şi $\forall\, x\in[0,\pi/2)$, $\cos x>0$. Deoarece $\cos 0>0$ şi $\cos 2<0$, rezultă $0<\pi/2<2$ deci $0<\pi<4$. Totodată funcţia sin este crescătoare pe $[0,\pi/2]$. Deoarece $\sin 0=0$, rezultă că $\sin(\pi/2)>0$ şi din relaţia

$$\sin^2(\pi/2)+\cos^2(\pi/2)=1,$$

rezultă $\sin(\pi/2)=1$. Formula lui Euler arată că

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

de unde deducem că $e^{i\pi}=-1$ şi $e^{2\pi i}=1$. Din proprietatea 3) rezultă că

$$\forall\, z\in\mathbb{C},\ e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z,$$

adică exponenţiala complexă este funcţie periodică de perioadă $2\pi i$. De asemenea se arată uşor că $e^z=1\Leftrightarrow z=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$; deci $e^u=e^v\Leftrightarrow u-v=2k\pi i$ cu $k\in\mathbb{Z}$.

14) Fie $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$, circumferinţa unitate. Aplicaţia $\varphi:[0,2\pi)\to\mathbb{T}$, $\varphi(x)=e^{ix}$ este bijectivă şi continuă. Demonstraţia este imediată.

15) Există o singură funcţie reală $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încît $f'=f$, $f>0$ şi $f(0)=1$. Într-adevăr, dacă ar exista două astfel de funcţii f,g atunci $\left(\dfrac{g}{f}\right)'=\dfrac{g'f-gf'}{f^2}=0$ deci $\dfrac{g}{f}=C$, constant; pentru $x=0$, se obţine $C=\dfrac{g(0)}{f(0)}=\dfrac{1}{1}=1$ şi în concluzie $g=f$. Aceasta arată că funcţia $f(x)=e^x$ studiată în liceu coincide cu cea introdusă aici, prin formula (1). De asemenea

există o singură funcţie reală $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ derivabilă, astfel încît $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ pentru orice $x > 0$ şi $f(1) = 0$, anume $f = \ln$, logaritmul natural. Aceasta este inversa aplicaţiei bijective $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, $x \mapsto e^x$. În fine, funcţiile cos, sin definite prin relaţiile (2) şi (3) coincid cu cele din liceu (pentru că aplicînd teorema V. 7 pentru funcţiile din liceu cos, sin, în jurul lui $x_0 = 0$, se obţin tocmai dezvoltările (2) şi (3)).

Comentariu. Un număr $\alpha \in \mathbb{C}$ se zice **algebric** dacă există un polinom $P(x) = c_0x^n + c_1x^{n+1} + ... + c_n$ cu coeficienţi din $\mathbb{Z}$ şi $c_0 \neq 0$ astfel încît $P(\alpha) = 0$. Numerele reale sau complexe care nu sunt algebrice se numesc **transcendente**. Se poate arăta că numerele algebrice formează un subcorp $\mathcal{A}$ al lui $\mathbb{C}$; evident $\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}$ (deoarece $\alpha = m/n$, $n \neq 0$ verifică ecuaţia $nx - m = 0$). În 1873, HERMITE a demonstrat că numărul e este transcendent, iar în 1882, LINDEMANN a arătat că π este transcendent (în particular, rezultă că e şi π sînt iraţionale). Cu aceasta, Lindemann a dat răspunsul definitiv negativ problemei cuadraturii cercului. Fiind dat un cerc, a construi un pătrat cu aceeaşi arie, numai cu rigla şi compasul, revine la a construi $\sqrt{\pi}$ pornind de la un segment de lungime 1; dar lungimile construibile sunt în mod necesar algebrice, iar $\sqrt{\pi}$ nu este algebric. Avem

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ şi } \pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(aceasta rezultă din dezvoltarea $\operatorname{arctg}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ...$ pentru $x \to 1$ şi aplicînd teorema V. 3).

Trecem la studiul funcţiilor trigonometrice complexe.

Definiţia V. 8. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ se definesc

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Din dezvoltarea (1) rezultă dezvoltările în serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

valabile în tot planul complex, iar funcţiile cos, sin, ca şi funcţiile cosinus hiperbolic, sinus hiperbolic sunt olomorfe în $\mathbb{C}$.

Direct din definiţii, rezultă $\forall z \in \mathbb{C}$, formulele următoare:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \ (\sin z)' = \cos z, \ (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \ (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \ \cos z = \operatorname{ch}(iz), \ \sin z = -i\operatorname{sh}(iz).$$

Este clar cum se poate continua cu studiul funcţiilor

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \text{ etc.}$$

(definite în punctele unde numitorii nu se anulează). Ecuaţia $\sin z = 0$ are soluţiile $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; iar dacă $\cos z = 0$, atunci $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ne ocupăm în continuare de noţiunea de argument al unui număr complex nenul. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$; ecuaţia $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$ are soluţii $\theta \in \mathbb{R}$ şi dacă $\theta_0 \in [0,2\pi)$ este o soluţie, atunci mulţimea tuturor soluţiilor va fi $\{\theta_k = \theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Definiţia V. 9. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se numeşte **argumentul lui** z mulţimea Arg$z$ a tuturor acelor θ astfel încît $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$. (Arg$z$ este nevidă conform proprietăţii 14)). Orice element al acestei mulţimi se numeşte **determinare** a argumentului lui z. θ_0 se numeşte **determinarea principală**. Aşadar, $\operatorname{Arg}z = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

EXEMPLU. $\operatorname{Arg}(1 + i) = \{\pi/4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\operatorname{Arg}(-5) = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Dacă $n \geq 2$ este întreg, atunci **radicalul complex de ordin** n este $\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$. Dacă $z \neq 0$, atunci

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \exp\left(i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right); k = 0, 1, ..., n-1$$

Definiţia V. 10. Dacă $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, **logaritmul complex al lui** z este mulţimea $\operatorname{Ln}z = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$. Scriind $w = u + iv$, ecuaţia $e^w = z$ devine $e^u(\cos v + i\sin v) = |z|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$, de unde $e^u = |z|$ şi $v - \theta_0 = 2k\pi$, deci $u = \ln|z|$, $v = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă următoarea formulă

$$\operatorname{Ln}z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}z.$$

Există o infinitate de determinări ale logaritmului complex, anume $(\operatorname{Ln}z)_k = \ln|z| + i(\theta_0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; pentru $k = 0$ se obţine determinarea principală $f(z) = \ln|z| + i\theta_0$.

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$ se defineşte puterea

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z}.$$

EXEMPLE. 1) $\mathrm{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $i^i = e^{i\mathrm{Ln}i} = \exp(i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))) = \exp(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

În Analiza complexă este important de introdus un concept de funcţie logaritmică, cu valori bine determinate. Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ un deschis şi $0 \notin \Omega$; se numeşte **determinare** (sau **ramură**) **continuă a argumentului** în Ω orice funcţie continuă $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ astfel încît $\forall\, z \in \Omega$, $e^{i\alpha(z)} = \frac{z}{|z|}$. Prin **determinare** (sau **ramură**) continuă a **logaritmului complex** în Ω se înţelege orice funcţie $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ astfel încît $\forall\, z \in \Omega$, $e^{\varphi(z)} = z$; de exemplu $\varphi(z) = \ln|z| + i\alpha(z)$ este o astfel de determinare. O astfel de funcţie este olomorfă în orice punct $z_0 \in \Omega$ şi în plus

$$\varphi'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{e^{\varphi(z)} - e^{\varphi(z_0)}} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{e^{\varphi(z_0)}\,[e^{\varphi(z) - \varphi(z_0)} - 1]}$$

şi ţinînd cont că $\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (conform 4)), rezultă $\varphi'(z_0) = \frac{1}{z_0}$. Se poate arăta că în $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nu există nici o determinare continuă a logaritmului dar dacă d este o semidreaptă prin origine, atunci în $\Omega = \mathbb{C} \setminus d$ există o astfel de determinare.

În încheierea acestui paragraf, prezentăm dezvoltările limitate ale unor funcţii elementare. Dacă $f : V \to \mathbb{R}$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ sunt funcţii definite pe o vecinătate V a unui punct $t_0 \in \mathbb{R}$, se scrie

$$f \in o(\varphi) \text{ în } t_0 \text{ dacă } \lim_{t \to t_0} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0$$

(se citeşte "f este un o mic de φ"). Cazul cel mai întîlnit este $\varphi(t) = (t - t_0)^n$, $n \geq 0$. Dacă $f(t) = P_n(t) + o(t - t_0)^n$ în t_0, adică $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - P_n(t)}{(t - t_0)^n} = 0$ şi dacă P_n este o funcţie polinomială de grad $\leq n$, atunci se spune că P_n este o **dezvoltare limitată a lui** f **de ordin** n, în jurul lui t_0. Indicăm cîteva dezvoltări limitate importante, care rezultă din formula Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

Pentru orice $x \in (-1,1)$ avem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n);$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Dezvoltarea limitată a unei funcţii f, de ordin n, în jurul lui t_0, este unică, dacă există. Într-adevăr, dacă $f(t) = P_n(t) + o(t - t_0)^n$ şi $f(t) = Q_n(t) + o(t - t_0)^n$, cu P, Q polinoame de grad cel mult n, atunci punînd $P_n(t) - Q_n(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + \ldots + a_n(t - t_0)^n$ rezultă $a_p = \lim_{t \to t_0} \frac{P_n(t) - Q_n(t)}{(t - t_0)^p} = 0$ pentru orice $p = 0, 1, \ldots, n$ deci $P_n = Q_n$. Dezvoltări limitate au loc şi în cazul complex.

4. Aproximarea şi interpolarea funcţiilor

Fiind dată o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ definită pe un interval I, problema aproximării este de a determina o funcţie mai simplă $g : I \to \mathbb{R}$ (de exemplu polinomială) astfel încît $\forall\, x \in I$, $f(x) \approx g(x)$. Orice astfel de formulă trebuie însoţită de o evaluare a erorii absolute

$$\varepsilon_x = |f(x) - g(x)|, \text{ pentru } x \in I.$$

Astfel, formula lui Taylor permite aproximarea **locală** a unei funcţii f de clasă $C^{n+1}(I)$ printr-un polinom de grad $\leq n$; adjectivul "locală" se referă la faptul că $\forall\, a \in I$, aproximarea $f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ are loc într-o vecinătate a punctului a. Utilizarea restului Lagrange (sau a restului integral) permite evaluarea erorii absolute în această formulă.

Există şi un alt tip de aproximări, anume cele **uniforme** (sau **globale**). Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$, g este o ε – aproximaţie globală a lui f dacă $d(f,g) \leq \varepsilon$, adică $\forall\, x \in I$, $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. De exemplu, dacă f este o funcţie continuă pe un interval compact $[a,b]$, atunci $\forall\, \varepsilon > 0$, este ε – aproximată global cu o funcţie etajată (conform corolarului teoremei III. 8). De asemenea există o teoremă datorată lui Weierstrass care arată că pentru orice funcţie

continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom P astfel încît $d(f,P) \le \varepsilon$, adică în "tubul de funcţii" limitat de $f - \varepsilon, f + \varepsilon$ este situat graficul unui polinom.

În cele ce urmează, ne vom ocupa de un alt tip de aproximare, numită **prin interpolare**. Aceasta se referă la utilizarea tabelelor de valori discrete asociate unor funcţii, care apar curent în diverse tipuri de măsurători şi prelucrări de date. Fie $x_0,x_1,\dots,x_p$ puncte distincte din I (numite **noduri de interpolare**) şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie teoretic definită pe I, ale cărei valori y_i sunt cunoscute doar în nodurile x_i deci

$$f(x_i) = y_i, \text{ pentru } i = 0,1,\dots,p.$$

Orice funcţie $g : I \to \mathbb{R}$ astfel încît $g(x_i) = y_i$, $0 \le i \le p$, se numeşte o **aproximare a lui f prin interpolare**. Graficele lui f şi g trec ambele prin cele $p + 1$ puncte $M_i(x_i,y_i)$. Una din funcţiile g remarcabile o constituie **polinomul Lagrange P de interpolare** de grad $\le p$, asociat lui f şi punctelor $M_0,M_1,\dots,M_p$, pentru care $P(x_i) = f(x_i)$, $0 \le i \le p$.

TEOREMA V. 9. Polinomul Lagrange de interpolare P asociat ţabelei $\dfrac{x_0 \ \ x_1 \ \dots \ x_p}{y_0 \ \ y_1 \ \dots \ y_p}$ există şi este unic; în plus, dacă f este de clasă $C^{p+1}(I)$ şi $M = \sup_{x \in I} |f^{(p+1)}(x)|$, atunci $\|f - P\| \le \dfrac{M}{(p+1)!} \sup_{x \in I} |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_p)|$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice i, $0 \le i \le p$, considerăm polinomul de grad p

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_p)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_p)}$$

şi se observă că $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ pentru $0 \le i,j \le p$. Luînd $P(x) = \sum_{i=0}^{p} y_i L_i(x)$, se observă că $\mathrm{gr}P \le p$ şi $P(x_j) = \sum_{i=0}^{p} y_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{p} y_i \delta_{ij} = y_j$, pentru orice $j = 0,1,\dots,p$.

Unicitatea lui P se demonstrează astfel: dacă P_1, P_2 sunt două polinoame de grad $\le p$ astfel încît $P_1(x_i) = y_i$, $P_2(x_i) = y_i$ pentru orice $0 \le i \le p$, atunci polinomul $P_1 - P_2$ are gradul $\le p$ şi are $p + 1$ rădăcini, anume nodurile $x_0,x_1,\dots,x_p$. Deci $P_1 - P_2$ este polinomul nul, adică $P_1 = P_2$.

De remarcat că polinoamele L_i depind numai de alegerea nodurilor de interpolare. Stabilim acum eroarea absolută pentru formula aproximativă $f(x) \approx P(x)$, $x \in I$. Pentru $x \ne x_i$, $0 \le i \le p$, notăm

$$R(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_p)} \quad \text{şi}$$

$$\varphi(u) = f(u) - P(u) - R(x)\cdot(u - x_0)(u - x_1)\dots(u - x_p).$$

Funcţia φ se anulează în $p + 2$ puncte distincte, anume $x_0,x_1,\dots,x_p,x$ deci conform teoremei lui Rolle aplicată succesiv, derivata $\varphi^{(p+1)}$ se va anula într-un punct $\xi \in I$, de unde va rezulta că $0 = f^{(p+1)}(\xi) - R(x)\cdot(p+1)!$, adică $R(x) = \dfrac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_p)$, de unde evaluarea din enunţ.

EXEMPLU. Determinăm polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelei

$$\frac{0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 4}{1 \ \ 0 \ \ 0 \ -3}.$$

În acest caz, avem $p = 3$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = -3$,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-1)(-2)(-4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{x(x-2)(x-4)}{3}$$

$$L_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-4)}{4}, \quad L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{24}$$

şi ca atare, $P(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i(x) = L_0(x) - 3L_3(x) = -\dfrac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$, după calcule uşoare.

În loc de polinoame se pot folosi funcţii polinomiale pe porţiuni, numite şi funcţii "spline". Dacă $I = [a,b]$ şi $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ este o diviziune cu n noduri interioare, o funcţie $s : I \to \mathbb{R}$ se numeşte **spline de grad k** ($k \ge 1$) relativ relativ la Δ dacă s este de clasă $C^{k-1}(I)$ şi pe orice interval $[x_i,x_{i+1}]$, $0 \le i \le n$, s coincide cu o funcţie polinomială cu coeficienţi reali de grad $\le k$. Orice polinom este o funcţie spline, nu şi reciproc; de exemplu

$$(x - \alpha)_+^k = \begin{cases} (x - \alpha)^k & \text{dacă } x > \alpha \\ 0 & \text{dacă } x \le \alpha \end{cases}$$

este spline de grad k şi nu este polinom (pentru că are o infinitate de zerouri, fără a fi funcţia nulă). Se demonstrează că mulţimea $S_{n,k}(\Delta)$ a funcţiilor spline de grad k relativ la o diviziune Δ fixată cu n noduri interioare $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ este un spaţiu vectorial real, avînd ca bază funcţiile

$$1, x, x^2, \dots, x^k, (x - x_1)_+^k, (x - x_2)_+^k, \dots, (x - x_n)_+^k$$

deci $\dim S_{n,k}(\Delta) = n + k + 1$. Pentru determinarea unei funcţii $S \in S_{n,k}(\Delta)$ sunt necesare (şi suficiente) $n + k + 1$ condiţii.

EXEMPLU. Fie $f(x) = \sin x$ şi nodurile $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$ pe $I = [0,\pi]$. Vrem să aproximăm f printr-o funcţie spline s de grad 1. În acest caz, $\dim S_{2,1}(\Delta) = 4$ şi o bază este $1, x, (x - \pi/4)_+, (x - \pi/2)_+$. Aşadar,

$$s = c_1 + c_2 x + c_3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)_+ + c_4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)_+$$

şi coeficienţii c_1, c_2, c_3, c_4 se determină punînd patru condiţii simple asupra lui s; de exemplu

$$s(0) = f(0) = 0\,,\ s\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ s\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,,\ s(\pi) = f(\pi) = 0.$$

Pentru funcţiile spline de grad superior se pun condiţii şi asupra derivatelor.

În încheiere, prezentăm cîteva consideraţii privind derivarea şi integrarea numerică (aproximativă).

a) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă şi $u \in (a,b)$; alegînd h suficient de mic astfel încît $u - h, u + h$ să aparţină intervalului $[a,b]$, atunci în aplicaţii practice se pot folosi următoarele formule aproximative:

$$f'(u) \approx \frac{f(u+h) - f(u)}{h}\,,\ f''(u) \approx \frac{f(u+h) + f(u-h) - 2f(u)}{h^2}.$$

Dacă $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ sunt puncte echidistante situate în $[a,b]$, cu $h = x_k - x_{k-1}$, pentru $1 \le k \le n+1$, atunci notînd $y_k = f(x_k)$, rezultă

$$f'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \text{ pentru } 0 \le k \le n \text{ şi } f''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2} \text{ pentru } 1 \le k \le n.$$

b) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Făcînd schimbarea de variabilă $x = a + \frac{b-a}{p}t$ ($p > 0$ constant), rezultă $J = \int_0^p g(t)\mathrm{d}t$ unde $g(t) = \frac{b-a}{p} f\left(a + \frac{b-a}{p}t\right)$. Să notăm $y_i = g(i)$ pentru $i = 0,1,\ldots,p$ şi fie $P(t) = \sum_{i=0}^{p} y_i L_i(t)$ polinomul Lagrange asociat lui g şi nodurile $0,1,\ldots,p$. Avem $g(t) \approx P(t)$ pentru $t \in [0,p]$ deci

$$J = \int_0^p g(t)\mathrm{d}t \approx \int_0^p P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p} y_i \int_0^p L_i(t)\mathrm{d}t$$

Numerele $c_i^{(p)} = \int_0^p L_i(t)\mathrm{d}t$ ($i = 0,1,\ldots,p$) pot fi tabelate şi sunt independente de funcţia f. În concluzie, rezultă formula aproximativă

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{p} y_i c_i^{(p)},$$

numită **formula lui** R. CÔTES (1682 – 1716). Folosind teorema V. 9. se poate da şi o estimare a erorii absolute în această formulă:

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{p} y_i c_i^{(p)} \right| = \left| \int_0^p g(t)\mathrm{d}t - \int_0^p P(t)\mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \int_0^p |g(t) - P(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{M}{(p+1)!}\int_0^p |t(t-1)\ldots(t-p)|\,\mathrm{d}t.$$

Pentru $p = 1$ se obţine **formula trapezelor**, iar pentru $p = 2$, **formula lui** T. SIMPSON (1710 – 1761). Fără a da detalii de demonstraţie, explicităm formula lui Simpson. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^4, $h = (b-a)/n$ cu n par, $n = 2m$; fie $x_k = a + kh$, $k = 0,1,\ldots,n$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_{2m}) + 4A_1 + 2A_2\right],$$

unde

$$A_1 = f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2m-1}) \text{ şi } A_2 = f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2m-2}).$$

Eroarea absolută este $\le \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \cdot \|f^{(4)}\|$.

EXEMPLU. Fie $J = \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$. Nu se poate aplica formula Leibnitz – Newton (deoarece integrantul nu are primitive exprimabile prin funcţii elementare). Se poate aplica o dezvoltare limitată de tipul $e^{x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}$ dar este dificilă estimarea erorii. Dacă dorim valoarea lui J cu eroare $\le 10^{-2}$, un calcul simplu arată că este suficient de luat $n = 4$ în formula lui Simpson. Deci $h = 1/4$, $x_k = k/4$ pentru $k = 0,1,2,3,4$, $A_1 = f(x_1) + f(x_3)$, $A_2 = f(x_2)$ şi rezultă

$$J \approx \frac{1}{12}\left[1 + e + 4(e^{1/16} + e^{9/16}) + 2e^{1/4}\right] \approx 1{,}46.$$

5. 10 exerciţii

1. Să se determine raza de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

$$\text{a) } \sum_{n\ge 0} nz^n\text{ ; b) } \sum_{n\ge 1}\frac{2^n}{n}z^n\text{ ; c) } \sum_{n\ge 1}\frac{n^n}{n!}z^n\ \ (z\in\mathbb{C}).$$

2. Să se determine mulţimile de convergenţă pentru seriile următoare:

$$\text{a) } \sum_{n\ge 0}\frac{n}{n+1}x^n\text{ ; b) } \sum_{n\ge 0} n\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^n\text{ ; c) } \sum_{n\ge 0} e^{nx}\ \ (x\in\mathbb{R}).$$

3. Să se determine suma următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n\ge 1} nx^n\text{ ; b) } \sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}\text{ ; c) } \sum_{n\ge 1}\frac{x^{2n}}{n!}\text{ ; d) } \sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n(n+1)}.$$

4. Să se arate că funcţia $J_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$ verifică relaţia $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $n\in\mathbb{N}$.

5. Să se arate că:

$$\text{a) } \sin^2x=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\text{ ; b) } e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

$$\text{c) } \operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

6. Să se arate că dacă f are o dezvoltare limitată de ordinul 1 în jurul lui t_0, atunci există $f'(t_0)$. Dar dacă f are o dezvoltare limitată de ordin 2 în jurul lui t_0, nu există neapărat $f''(t_0)$; analizaţi exemplul lui $f(t)=\cos t+t^3\sin\frac{1}{t}$ dacă $t\neq 0$; $f(0)=1$ şi $t_0=0$.

7. Un număr real $a\ge 0$ se zice **constructivist** dacă există funcţii calculabile $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g(n)\neq 0$ pentru orice $n\ge 1$, $h(n)\to 0$, astfel încît $\forall\, n\ge 1$, $\left|a-\frac{f(n)}{g(n)}\right|\le h(n)$. Să se arate că orice număr raţional $a\ge 0$ este constructivist şi că π şi e sunt constructiviste. (O funcţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ se zice **calculabilă** dacă valorile ei pot fi calculate cu ajutorul computerului; această definiţie este desigur discutabilă).

8. Să se determine mulţimile $A=\{z\in\mathbb{C}\mid \sin z=2\}$, $B=\{z\in\mathbb{C}\mid |\sin z|=1\}$.

9. Să se determine polinomul Lagrange pentru:
a) $f(x)=\sin x$ şi nodurile $x_0=0$, $x_1=\pi/2$, $x_2=\pi$;
b) tabela $\dfrac{0\ \ 1\ \ 2\ \ 3}{2\ \ 0\ \ 1\ \ 4}$.

10. a) Să se calculeze cu eroare $\le 10^{-3}$ integrala $I=\int_0^1\frac{dx}{x^4+1}$.

b) Să se calculeze π cu aproximaţie $\le 10^{-3}$, folosind una din următoarele formule:

$$\pi=4\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}\ ;\ \pi=16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. a) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$; b) $R=1/2$; c) $R=1/e$.

2. a) $(-1,1)$; b) Fie $\frac{x+1}{x+2}=y$; necesar $|y|<1$ deci $x\in(-3/2,\infty)$.
c) $e^x=y$; $y\in(-1,1)$ deci $x\in(-\infty,0)$.

3. a) Fie $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$, $x\in(-1,1)$ deci

$$S(x)=x+2x^2+3x^3+\ldots=x(1+2x+3x^2+\ldots)=x(x+x^2+x^3+\ldots)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)';$$

b) $S(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$; $S'(x)=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$, $\forall\ x\in(-1,1)$. Deci $S(x)=-\ln(1-x)+C$. Facem $x=0$ şi rezultă $C=0$.
c) $S(x)=e^{x^2}-1$;
d) Calculăm $(x\cdot S(x))'$ etc.

4. În acest caz, raza de convergenţă este ∞ deci putem deriva termen cu termen de două ori.

5. a) Avem $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$ şi calculăm $\sin^2(x)$;

b) Avem $e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ şi punem $u=\sin x$ etc.

c) Se integrează dezvoltarea $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$ sau se aplică formula lui Taylor.

6. Fie $f(t)=a+bt+o(t-t_0)$. Făcînd $t\to t_0$ rezultă $f(t_0)=a+bt_0$. În plus,

$$f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{a+bt+o(t-t_0)-a-bt_0}{t-t_0}=b.$$

În exemplul dat, rezultă $f(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ şi $f''(0)$ nu există.

7. Dacă $\alpha = p/q$ cu $p,q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ luăm $f(n) = p$, $g(n) = q$ şi $h(n) = 0$. Avem $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} + ...\right)$. Notînd $s_n = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$, rezultă $|\pi - s_n| < \frac{4}{2n+3}$. Similar, $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$, avem

$$|e - s_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + ...\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ...\right] = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} \text{ etc.}$$

8. $\sin z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$; notînd $e^{iz} = w$, rezultă $w - 1/w = 4i$, $w^2 - 4iw - 1 = 0$ deci $w = 2i \pm i\sqrt{3}$. Atunci

$$iz = \mathrm{Ln}(2i \pm i\sqrt{3}) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi),$$

$k \in \mathbb{Z}$. Apoi

$$\sin z = \sin(x + iy) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right] = \sin x \cdot \mathrm{ch}y + i\cos x \cdot \mathrm{sh}y$$

şi rezultă $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$ deci $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{sh}y = \pm \cos x\}$.

9. a) $P(x) = -\frac{4}{\pi^2}(x^2 - \pi x)$; b) $P(x) = -\frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 23x - 12)$.

10. Se poate aplica formula lui Simpson ($n = 6$) dar se recomandă utilizarea dezvoltării lui arctg$x$.

LECŢIA A VI-A

DERIVATE PARŢIALE, EXTREME LIBERE

INTRODUCERE

În această lecţie dăm primele rezultate de calcul diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile reale. Cazul funcţiilor de o variabilă este un caz particular şi în acelaşi timp el permite şi o testare a înţelegerii cazului general. Vom defini şi studia derivatele parţiale, diferenţiala, extinderea formulei lui Taylor şi determinarea extremelor libere ale funcţiilor de mai multe variabile reale. În încheierea acestei lecţii se dau cîteva aplicaţii utile.

1. Derivata după o direcţie, derivate parţiale, matrice jacobiană

Fie $a,b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$. Definim:
dreapta ce "trece" prin a şi b ca mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ x = a + t(b - a),\ t \in \mathbb{R}\}$$

semidreapta din a trecînd prin b

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ x = a + t(b - a),\ t \geq 0\}$$

segmentul ce "uneşte" a cu b

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ x = a + t(b - a),\ 0 \leq t \leq 1\} = [a,b]$$

(ultima egalitate este o **notaţie**).
Vom numi **direcţie în $\mathbb{R}^n$** o **semidreaptă din** $0 \in \mathbb{R}^n$. Este clar că fiecare punct $b \neq 0$ în $\mathbb{R}^n$ determină o direcţie dar puncte diferite pot determina aceeaşi direcţie. Însă, orice direcţie conţine un **unic** punct de normă 1 numit **versorul** direcţiei respective. Putem deci **defini** o direcţie şi ca **un punct (vector) de normă 1** (versor). Vom folosi mai des această definiţie pentru direcţie.

Comentariu. Orice semidreaptă determină o direcţie (unică) (semidreptei $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x = a + t(b - a),\ t \geq 0\}$ îi corespunde direcţia $s = \frac{b-a}{\|b-a\|}$). O dreaptă determină **două** direcţii opuse (dreptei $\{x \in \mathbb{R}^n; x = a + t(b - a), t \in \mathbb{R}\}$ îi corespund direcţiile $\pm\frac{b-a}{\|b-a\|}$).

Să fixăm o funcție $f(x_1,...,x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ definită într-un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$; fie $a = (a_1,...,a_n) \in A$ un punct fixat și $x = (x_1,...,x_n)$ "punctul curent" din $\mathbb{R}^n$. Fie $s = (s_1,...,s_n) \in \mathbb{R}^n$ un versor n – dimensional ($\|s\| = 1$ adică $s_1^2 + ... + s_n^2 = 1$). Tripletului (f,a,s) i se poate asocia funcția de o variabilă reală $g(t) = f(a + ts) = f(a_1 + ts_1, ... ,a_n + ts_n)$, definită în vecinătatea originii; mai precis, cum A este deschis și $a \in A$ există $r > 0$ astfel încît $B(a,r) \subset A$; deci $\forall\ t \in (-r,r)$, $d(a + ts,a) = \|a + ts - a\| = \|ts\| = |t| < r$ deci $a + ts \in B(a,r)$ și astfel este bine definită funcția $g : (-r,r) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + ts)$.

Definiția VI. 1. Fie (f,a,s) ca mai sus. Se spune că f **este derivabilă în punctul** a **după direcția** s dacă funcția g este derivabilă în $t = 0$; în plus, numărul real

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}$$

se numește **derivata lui** f **după** s **în** a.

Așadar, notînd $x = a + ts$, vectorul $x - a$ este coliniar cu s și

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+ts)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{t} = \lim_{\substack{x\to a\\ x=a+ts}}\frac{f(x)-f(a)}{t}$$

aceasta modelează "viteza de variație a lui f pe direcția s, începînd din a".

Vom nota în continuare cu

$$\mathrm{e}_1 = (1,0,...,0),\ \mathrm{e}_2 = (0,1,...,0),...,\mathrm{e}_n = (0,0,...,1)$$

vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}^n$; evident, fiecare e_k, $1 \le k \le n$ este un versor.

Definiția VI. 2. Fie $f(x_1,...,x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ ca mai sus. Se spune că f **are derivată parțială în punctul** a, în raport cu variabila x_k (variabila de indice k) dacă există $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}e_k}(a)$; acest număr real se mai notează $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ sau $D_kf(a)$.

Așadar,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}e_k}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,...,a_k+t,...,a_n)-f(a_1,...,a_k,...,a_n)}{t}.$$

Funcția f se zice **derivabilă parțial pe** A dacă $\forall a \in A$, există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ pentru orice $k = 1,...,n$. În acest caz se definesc n funcții $\frac{\partial f}{\partial x_k} : A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $1 \le k \le n$, numite **derivatele parțiale ale lui** f **pe** A. Funcția f se zice de **clasă** C^1 **pe** A și se scrie $f \in C^1(A)$ dacă f este continuă, derivabilă parțial pe A și cu toate derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ continue pe A.

În cazul $n = 2$ vom scrie (x,y) în loc de (x_1,x_2), iar în cazul $n = 3$, punctul curent (x_1,x_2,x_3) se notează cu (x,y,z). O funcție $f(x,y)$, $f : A \to \mathbb{R}$ (A deschis în $\mathbb{R}^2$) este derivabilă în raport cu x și respectiv cu y în punctul $a = (a_1,a_2)$ dacă există

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t} \text{ și respectiv}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2+t)-f(a_1,a_2)}{t},$$

acestea reprezentînd "vitezele de variație a lui f pe direcțiile axelor Ox, Oy". Dacă aceasta are loc pentru orice punct $a \in A$, atunci derivatele parțiale ale lui f în punctul curent din A vor fi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Notațiile Δx, Δy, în loc de t, sunt folosite în practică. Totodată, reținem că $\frac{\partial f}{\partial x}$ se calculează derivînd f în mod uzual în raport cu x (considerînd y constant); similar, $\frac{\partial f}{\partial y}$ se calculează derivînd f în raport cu y și considerînd x constant.

Pentru o funcție $f(x,y,z)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x};$$

derivînd în raport cu x și considerînd y,z constante.

EXEMPLUL 1. Fie $f(x,y) = x^2 + xy$, $A = \mathbb{R}^2$ și $a = (5, -3)$. Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(5+t,-3)-f(5,-3)}{t} = 7 \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(5,-3+t)-f(5,-3)}{t} = 5.$$

În punctul curent, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ și $\frac{\partial f}{\partial y} = x$; înlocuind aici $x = 5$, $y = -3$, regăsim valorile anterioare.

EXEMPLUL 2. Pentru $f(x,y,z) = (x + y)\sin yz$ avem, în punctul curent:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin yz\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1\cdot\sin yz + (x+y)\cdot\cos yz\cdot z \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z} = (x+y)\cdot\cos yz\cdot y\,.$$

EXEMPLUL 3. Fie $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ definită pe deschisul $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Avem $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{x_k}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}}$ pentru orice $k = 1,2,\dots,n$.

EXEMPLUL 4. Orice funcţie "elementară" este de clasă C^1 pe orice deschis conţinut în domeniul ei de definiţie; deci polinoamele, funcţiile raţionale, exponenţialele etc. ca şi compuneri ale acestora sunt funcţii de clasă C^1.

Definiţia VI. 3. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ un deschis, $a \in A$ şi $F : A \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie cu valori vectoriale. Dacă $f_i : A \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, sunt componentele lui F deci $\forall\, x \in A$, $F(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x))$ şi există toate derivatele parţiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, se defineşte **matricea jacobiană** (a aplicaţiei F în punctul a) prin

$$J_F(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$$

(după numele matematicianului german C. G. JACOBI, 1804 – 1851).
Dacă $m = n$ matricea $J_F(a)$ este pătratică şi determinantul ei se numeşte **jacobianul** (sau **determinantul funcţional**) al funcţiilor $f_1,\dots,f_n$ în raport cu variabilele $x_1,\dots,x_n$, în punctul a şi se notează astfel:

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a) = \det J_F(a)$$

Vom spune că F este **de clasă** C^1 pe A ($F \in C^1(A)$) dacă $f_1,\dots,f_m$ sunt de clasă C^1 pe A.

EXEMPLUL 1. Fie aplicaţia $F : A \to \mathbb{R}^2$, $(\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$, definită pe un deschis $A \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}$. În punctul curent avem

$$J_F(\rho\,,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \text{ şi jacobianul este } \rho.$$

EXEMPLUL 2. Fie $F : A \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = (x_1^2 + 7x_2 + \ln x_3,\ x_1/x_4) = (f_1(x), f_2(x))$, unde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, definită în deschisul $A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 > 0,\ x_4 \ne 0\}$. În acest

f dacă există o bilă $B(a,r) \subset A$ pe care diferenţa $f(x) - f(a)$ are un semn constant; mai precis, punctul a este un punct de **minim** (respectiv **maxim**) **local** pentru f dacă $\forall\, x \in B(a,r)$, $f(x) \ge f(a)$ (respectiv $f(x) \le f(a)$).

Un punct $a \in A$ se numeşte **critic** pentru f dacă f este diferenţiabilă în a şi $df(a) = 0$, deci $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ pentru orice $k = 1,\dots,n$.

TEOREMA VI. 11 (teorema lui P. FERMAT, 1601 – 1665). Dacă o funcţie f ca mai sus este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, care este un punct de extrem local pentru f, atunci a este punct critic pentru f.

DEMONSTRAŢIE. Fixăm un versor $s \in \mathbb{R}^n$ ales arbitrar. Alegem $r > 0$ astfel încît diferenţa $f(x) - f(a)$ să aibă semn constant pe o bilă $B(a,r) \subset A$. Atunci funcţia $g : (-r,r) \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + ts)$ este derivabilă în $t = 0$ şi diferenţa $g(t) - g(0)$ are semn constant pentru orice $t \in (-r,r)$. Aceasta înseamnă că $t = 0$ este punct de extrem local al lui g şi conform teoremei lui Fermat din liceu, rezultă $g'(0) = 0$, adică $\frac{df}{ds}(a) = 0$. În particular, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ pentru $1 \le k \le n$ şi $df(a) = 0$, conform teoremei VI. 5.

COROLAR. Dacă $f(x_1,\dots,x_n)$ este o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, atunci punctele de extrem local ale lui f sunt printre soluţiile, situate în A, ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) = 0\,,\dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n) = 0\,.$$

EXEMPLU. Extremele locale ale funcţiei $f(x,y) = x^3 + 6y^3 - 9xy$ se află **printre** soluţiile sistemului $\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, adică $3x^2 - 9y = 0$, $18y^2 - 9x = 0$.

OBSERVAŢII. Reciproca teoremei VI. 11 este falsă, aşa cum arată exemplul funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$; punctul $a = (0,0)$ este evident critic, dar nu este punct de extrem local pentru f, deoarece diferenţa $f(x,y) - f(0,0) = xy$ nu are semn constant pe vreo bilă centrată în origine.

Corolarul teoremei VI. 11 arată că anularea derivatelor de ordin I reprezintă doar o condiţie **necesară** de extrem. În cele ce urmează vom da condiţii **suficiente** de extrem, deci criterii de a decide care din punctele critice ale unei funcţii sunt şi puncte de extrem ale ei. Este necesară în prealabil următoarea:

LEMĂ. Fie $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice simetrică din $M_n(\mathbb{R})$ şi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $x = (x_1,...,x_n)$, forma pătratică asociată. Dacă φ este pozitiv definită (adică $\varphi(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), atunci există $\lambda > 0$ astfel încît $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(y) \geq \lambda\|y\|^2$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ sfera unitate din $\mathbb{R}^n$. Fiind închisă şi mărginită în $\mathbb{R}^n$, mulţimea S este compactă. Funcţia polinomială φ fiind continuă, ea este mărginită pe S. Fie $\lambda = \inf\limits_{x\in S}\varphi(x)$ deci există $\xi \in S$ astfel încît $\lambda = \varphi(\xi)$. Dar $\xi \neq 0$ (căci $0 \notin S$) şi ca atare $\varphi(\xi) > 0$ deci $\lambda > 0$, adică $\forall\, x \in S$, $\varphi(x) \geq \lambda$. Dacă $y = 0$, atunci inegalitatea din enunţ este evidentă; fie atunci $\forall\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ deci $\frac{y}{\|y\|} \in S$ şi ca atare, $\varphi(\frac{y}{\|y\|}) \geq \lambda$. În concluzie, $\frac{1}{\|y\|^2}\varphi(y) \geq \lambda$ şi lema este demonstrată.

TEOREMA VI. 12. Fie $f(x_1,...,x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ şi a un punct critic pentru f. Dacă forma pătratică $q = d^2f(a)$ este pozitiv definită (respectiv negativ definită), atunci a este punct de minim local (respectiv maxim local).

DEMONSTRAŢIE. Presupunem q pozitiv definită deci conform lemei există $\lambda > 0$ astfel încît $q(x - a) \geq \lambda\|x - a\|^2$. Scriind formula lui Taylor în jurul lui a, rezultă

$$f(x) = f(a) + T_a(x) + \frac{1}{2}R_1\text{, unde}$$

$$T_a(x) = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + ... + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \text{ şi}$$

$$R_1 = (x_1 - a_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) + 2(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi) + ... + (x_n - a_n)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\xi),$$

unde $\xi \in [a,x]$. Deoarece a este critic, rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$ deci $T_a(x) = 0$ şi ca atare $f(x) - f(a) = 1/2 \cdot R_1$ în vecinătatea lui a. Deoarece $f \in C^2(A)$, funcţiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ sunt continue pe A deci

$$R_1 = (x_1 - a_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + 2(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + ...$$

$$... + (x_n - a_n)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) + o(\|x - a\|^2) = q(x - a) + o(\|x - a\|^2).$$

Atunci $f(x) - f(a) = \frac{1}{2}R_1 \geq \frac{1}{2}\cdot q(x - a) + \alpha(x)\cdot\|x - a\|^2$, unde $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Rezultă $f(x) - f(a) \geq \left(\frac{\lambda}{2} + \alpha(x)\right)\cdot\|x - a\|^2$. Deoarece $\lambda > 0$, se poate găsi $r > 0$ astfel încît $\lambda/2 + \alpha(x) > 0$ pentru orice $x \in B(a,r)$. Ca atare, $f(x) - f(a) \geq 0$ pe bila $B(a,r)$ şi a rezultă punct de minim local pentru f.

Cazul punctului de maxim se tratează similar sau se consideră $-f$.

În algebra liniară se demonstrează că o formă pătratică reală este pozitiv definită (respectiv negativ definită) $\Leftrightarrow$ toate valorile proprii ale matricii asociate sunt strict pozitive (respectiv toate valorile proprii strict negative). Am văzut că pentru forma pătratică $d^2f(a)$, matricea asociată este hessiana

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Fiind simetrică, valorile proprii ale lui H vor fi reale. Rezultă următorul procedeu de determinare a punctelor de extrem:

Pasul I. Fiind dată o funcţie reală $f(x_1,...,x_n)$ de clasă C^2, se determină punctele critice ale lui f.

Pasul II. Fie a un punct critic. Se calculează hessiana H corespunzătoare şi se determină valorile proprii ale lui H.

Pasul III (decizia). Dacă toate valorile proprii ale lui H sunt strict pozitive, atunci a este un punct de minim local. Dacă toate valorile proprii ale lui H sunt strict negative, atunci a este un maxim local. Dacă unele valori proprii sunt strict pozitive şi celelalte strict negative, atunci a nu este punct de extrem local. În fine, dacă 0 este o valoare proprie pentru H, atunci nu se poate decide şi pentru a evalua semnul diferenţei $f(x) - f(a)$, se aplică o dezvoltare Taylor de ordin superior în jurul punctului a. Se trece apoi la alte puncte critice.

EXEMPLUL 1. Determinăm extremele locale ale funcţiei

$$f(x,y) = x + y + 4\sin x\sin y$$

în deschisul $A = \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)\times\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ din $\mathbb{R}^2$. În acest caz,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 4\cos x \sin y\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 4\sin x \cos y\,.$$

Punctele critice verifică relaţiile $\sin y\cos x = -1/4$, $\sin x\cos y = -1/4$ deci $\sin(x + y) = -1/2$ şi $\sin(x - y) = 0$. Se găseşte un singur punct critic, anume $a = \left(\frac{7\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$. Calculăm acum hessiana H în punctul a. Avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -4\sin^2\frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 4\cos^2\frac{7\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -4\sin^2\frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}\,.$$

Atunci

$$H = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

şi valorile proprii ale lui H sunt ambele strict negative. Deci a este un punct de maxim local pentru f.

EXEMPLUL 2. Determinăm extremele locale ale funcţiei

$$f(x,y,z) = x^2y + yz + 32x - z^2.$$

Există un singur punct critic, anume $a = (2,-8,-4)$. Hessiana este

$$H = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

şi are valori proprii atît strict pozitive cît şi strict negative, deci a nu este punct de extrem local pentru f.

OBSERVAŢIE. Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă şi f o funcţie de clasă C^1 pe un deschis care conţine K. Extremele globale ale lui f pe K sunt atinse în puncte din K. Dacă acestea aparţin lui $\overset{\circ}{K}$, atunci ele sunt puncte critice şi pot fi determinate ca mai sus. Dacă ele nu aparţin lui $\overset{\circ}{K}$, ele aparţin mulţimii $\mathrm{Fr}K = K \setminus \overset{\circ}{K}$ şi sunt necesare alte metode pentru determinarea lor.

5. Aplicaţii

În acest paragraf dăm cîteva metode aproximative, care pot fi cu uşurinţă "dizolvate" în programe de calcul.

I. Metoda celor mai mică pătrate.
Presupunem că în măsurătorile unei mărimi $f(x)$ se obţine o tabelă de valori de forma

$$\frac{x_0\ \ x_1\ \dots\ x_p}{y_1\ \ y_2\ \dots\ y_p},\ \text{cu } y_i = f(x_i),\ 0 \le i \le p.$$

Am văzut în lecţia a V-a, §4 că rostul interpolării este acela de a estima valoarea lui f în puncte situate **între** nodurile x_i, $0 \le i \le p$. Există însă situaţii în care este util de ştiut cît de mult se abate graficul funcţiei f de la o dreaptă. Dacă dreapta $y = ax + b$ ar trece prin punctele (x_i,y_i), $0 \le i \le p$, atunci am avea $y_i - ax_i - b = 0$ pentru orice $i = 0,1,\dots,p$. În general acest fapt nu se poate realiza şi se pune condiţia ca expresiile $y_i - ax_i - b$ să fie "simultan mici", în sensul că expresia

$$E(a,b) = \sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)^2$$

să fie minimă. **Metoda celor mai mici pătrate** constă în determinarea constantelor a,b cu această proprietate. Conform teoremei VI. 11, condiţiile necesare de extrem sunt

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0\ ;\ \frac{\partial E}{\partial b} = 0\,,\ \text{adică}\ \sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)\cdot x_i = 0\,,\ \sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b) = 0\,.$$

Dacă (a_0,b_0) este soluţia acestui sistem (în ipoteza că există), se verifică uşor că ea reprezintă un punct de minim pentru E. Dreapta $y = a_0x + b_0$ se mai numeşte **dreapta de regresie** asociată tabelei iniţial considerate; ea "mediază" printre punctele $M_i(x_i,y_i)$, $0 \le i \le p$.
Metoda celor mai mici pătrate se generalizează astfel: pentru aceeaşi tabelă de date căutăm parametrii $c_1,c_2,\dots,c_k$ şi o curbă de ecuaţie $y = \varphi(x,c_1,c_2,\dots,c_k)$ care să medieze printre punctele M_i, $0 \le i \le p$. Se formează expresia

$$E(c_1,c_2,\dots,c_k) = \sum_{i=0}^{p} [y_i - \varphi(x_i,c_1,c_2,\dots,c_k)]^2$$

şi se pun condiţiile necesare de minim $\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$, $1 \le i \le k$, determinînd valorile lui $c_1,c_2,\dots,c_k$.

O altă generalizare a metodei celor mai mici pătrate este următoarea: fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu vectorial normat real şi $Y \subset X$ un subspaţiu vectorial. Se fixează $a \in X$ şi se determină $y_0 \in Y$ astfel încît $d(a,y_0) = \|a - y_0\|$ să fie minimă.

II. Metoda lui W. RITZ (1878 – 1909).
Fie X un SVN real şi $f : X \to \mathbb{R}$ o aplicaţie fixată, cu valori reale (numită şi **funcţională**). Pentru a determina extremele lui f pe un subspaţiu finit dimensional X' al lui X, se poate proceda astfel: se alege o bază $(e_1,\dots,e_k)$ a lui

X'. Orice vector $x \in X'$ se scrie unic sub forma $x = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$ şi se calculează $f(x) = F(c_1,...,c_k)$. În acest mod, se evidenţiază o funcţie reală de k variabile (presupusă de clasă C^1) şi se pun condiţiile necesare de extrem $\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$, $1 \le i \le k$. Se determină de aici $c_1,...,c_k$ şi cu aceasta un vector x candidat la soluţia problemei.

III. Metoda gradientului.
Indicăm o metodă mai specială pentru determinarea extremelor unor funcţii reale. Fie $f(x_1,...,x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in A$ un punct fixat. Presupunem că a nu este critic. Reamintim că pentru orice versor $s \in \mathbb{R}^n$, $\frac{df}{ds}(a) = (s, \nabla_a f)$; notînd cu $n = \text{vers}\nabla_a f = \nabla_a f / \|\nabla_a f\|$, versorul gradientului $\nabla_a f = \text{grad}_a f$, se observă că

$$\max_s \frac{df}{ds}(a) = \frac{df}{dn}(a) = (n, \nabla_a f) = \|\nabla_a f\| \text{ şi } \min \frac{df}{ds}(a) = -\frac{df}{dn}(a)$$

(de exemplu, pentru $n = 2$ sau 3 avem $\frac{df}{ds}(a) = \|s\| \cdot \|\nabla_a f\| \cdot \cos\theta$, cu $\theta = (s, \widehat{\nabla_a f})$ şi $\cos\theta$ este maxim pentru $\theta = 0$ adică $s = n$ şi minim pentru $\theta = \pi$, deci $s = -n$). Rezultă că pentru f,a fixate, variaţiile extreme ale lui f în a se produc pe direcţia lui $\nabla_a f$ şi tocmai acest fapt stă la baza metodei gradientului pentru determinarea punctelor critice ale lui f, fără a rezolva sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Fie deci $f \in C^1(A)$, $a \in A$ şi $n_a = \nabla_a f \neq 0$. Vom numi **traiectorie de gradient pornind din** a orice drum parametrizat $g : I \to A$ de clasă C^1, definit pe un interval centrat în origine, astfel încît

$$g(0) = a \text{ şi } \forall\, t \in I,\ g'(t) = \nabla_{g(t)} f \text{ deci } g'(0) = n_a.$$

Aşadar, imaginea drumului g trece prin a şi este tangentă în a la vectorul n_a. Notăm $h(t) = f(g(t)) = f(g_1(t),...g_n(t))$, deci

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \cdot g_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \cdot g_n'(t)$$

Dar
$$g_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)), \dots, g_n'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \text{ deci}$$

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))^2 = \|\nabla_{g(t)} f\|^2 \ge 0.$$

Aşadar, funcţia $h : I \to \mathbb{R}$ este monoton crescătoare, adică valorile lui f cresc în lungul oricărei traiectorii de gradient (şi descresc în cazul cînd $g'(0) = -n_a$).

TEOREMA VI. 13. Presupunem că $I = (t_0,\infty)$ şi că există $\xi = \lim_{t\to\infty} g(t)$ în A. Atunci ξ este un punct critic al lui f.

DEMONSTRAŢIE. În caz contrar, $n_\xi \neq 0$. Definim $\forall\, t \in I$, $h(t) = f(g(t))$ ca mai sus. Deoarece $g(t) \to \xi$, rezultă că $h(t) \to f(\xi)$. Deoarece ∇f este continuu şi $n_\xi = \nabla_\xi f \neq 0$, există $m > 0$ şi o vecinătate V a lui ξ astfel încît $\forall\, x \in V$, $\|\nabla_x f\| > m$. Alegem $t_1 \in I$ astfel încît $g(t) \in V$ pentru $t \ge t_1$. Avem $\forall\, t > t_1$,

$$\int_{t_1}^{t} h'(t)\,dt = h(t) - h(t_1) \text{ şi cum } h'(t) = \|\nabla_{g(t)} f\|^2, \text{ rezultă}$$

$$\int_{t_1}^{t} h'(t)\,dt \ge \int_{t_1}^{t} m^2\,dt = m^2(t - t_1).$$

Aşadar, $h(t) \ge h(t_1) + m^2(t - t_1)$ pentru orice $t > t_1$. Făcînd $t \to \infty$, ar rezulta că $f(\xi) \ge \infty$, absurd.

În practică, pentru a determina un punct de maxim local al funcţiei f se poate proceda astfel: se fixează un punct $x_0 \in A$ suficient de aproape de ξ; se determină $s_0 = \nabla_{x_0} f$. Se determină $\lambda > 0$ astfel încît $x_0 + \lambda s_0 \in A$ şi $f(x_0 + \lambda s_0)$ să fie maxim şi fie λ_0 valoarea găsită. Se notează $x_1 = x_0 + \lambda_0 s_0$; se determină $s_1 = \nabla_{x_1} f$, λ_1 corespunde maximului lui $f(x_1 + \lambda s_1)$, $x_2 = x_1 + \lambda_1 s_1$, ..., $\xi \approx x_N$ etc. Metoda se adaptează pentru cazul minimelor.

EXEMPLU. Căutăm minimul funcţiei $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$, cu restricţiile $\{x^2 - y^2 \le 16, y \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$. Evident, $\nabla f = (2x - 4, 2y - 2)$. Fixăm $x_0 = (0,0)$ deci $s_0 = -\nabla_{x_0} f = (4,2)$; $f(x_0 + \lambda s_0) = f(4\lambda, 2\lambda) = 20\lambda^2 - 20\lambda$ şi minimul este atins pentru $\lambda = 1/2$. Luăm $x_1 = x_0 + \frac{1}{2}s_0 = (2,1)$ etc. De fapt $\xi = x_1$ este punctul căutat.

6. 10 exerciţii

1. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + xy^2$.

2. Să se calculeze derivata funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 - y^2$$

în punctul (1,1) după direcţia $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se arate că:
i) f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$
ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt discontinue în (0,0).

4. Fie $P(x,y,z)$ un polinom omogen de grad $m > 0$. Să se arate că orice punct critic al funcției P este un zero pentru P (adică (x_0,y_0,z_0) critic implică $P(x_0,y_0,z_0) = 0$).

5. Să se determine extremele funcțiilor:
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

6. Dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu volum constant 1, determinați pe cel cu aria totală a fețelor minimă.

7. Fie $A = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 < r < +\infty,\ 0 < \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$ și $F : A \to \mathbb{R}^3$, $F = (f_1,f_2,f_3)$, $f_1(r,\theta,z) = r\cos\theta$, $f_2(r,\theta,z) = r\sin\theta$, $f_3(r,\theta,z) = z$. Să se determine $F(A)$ arătînd că F este o bijecție de clasă C^1 a lui A pe $F(A)$.
Să se calculeze jacobianul lui F.

8. Fie $M(n)$ mulțimea matricilor $n \times n$ peste $\mathbb{R}$. Prin identificări naturale $M(n) \approx \mathbb{R}^{n^2}$.
Considerăm funcția $F : M(n) \to M(n)$, $F(A) = AA^t$ (A^t transpusa lui A).
Arătați că F este diferențiabilă și calculați $dF(I)$ unde I este matricea unitate.

9. a) Să se calculeze $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ dacă $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ cu φ,ψ de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$.
b) Să se determine o funcție $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 care să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x + y \text{ pe } \mathbb{R}^2$$

și $f(x,0) = x$, $f(0,y) = y^2$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

10. Să se determine dreapta de regresie care mediază printre punctele $M_1(1,2)$, $M_2(2,0)$, $M_3(3,1)$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Avem $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$.

2. Notăm $s = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\dfrac{df}{ds}(1,1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{1}{2}\cdot 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-2) = 1 - \sqrt{3}$.

3. i) Avem pentru $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \dfrac{x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x} = x\cos\dfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\to} 0$ deci $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Analog $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Avem în continuare

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \text{ deci } df(0,0) = 0.$$

Diferențiabilitatea în celelalte puncte rezultă imediat.

ii) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{etc.}$$

4. Avem $x\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + y\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) + z\dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = mP(x,y,z)$ deci (x_0,y_0,z_0) critic implică $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$ deci $P(x_0, y_0, z_0) = 0$.

5. De exemplu pentru funcția g obținem punctele critice rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 2y + 12x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile (0,0,–1) (24,–144,–1). Hessiana este

$$\begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pentru (0,0,–1) se obțin valorile proprii 2, $\dfrac{2 \pm \sqrt{145}}{2}$ deci nu avem extrem (studiați comportarea funcției g în jurul punctului (0,0,–1)). Pentru (24,–144,–1) valorile proprii sunt pozitive deci punctul este de minim.

6. Sunt de determinat valorile funcției $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, $x,y,z > 0$ cu condiția $xyz = 1$. Scoatem $z = \dfrac{1}{xy}$ și reducem problema la extremele funcției $g(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ $x,y > 0$. Găsim punctul critic $x = 1$, $y = 1$ ($z = 1$). Se arată imediat că este un minim

local. Pentru a arăta că minimul este **global** avem $g(1,1) = 3$ deci vom arăta că $g(x,y) \geq 3$ pentru $x,y > 0$; $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3$, $\forall\, x,y > 0$. Notînd $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$ totul revine la a arăta că $uv(u + v - 3) + 1 \geq 0$ $u,v > 0$. Pentru $u + v > 3$ totul este clar. Rămîne de dovedit că $uv(u + v - 3) + 1 \geq 0$ pe **compactul**

$$K \subset \mathbb{R}^2,\ K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u + v \leq 3,\ u,v \geq 0\}$$

(am pus $u,v \geq 0$ căci pentru $u = 0$ sau $v = 0$ condiţia este îndeplinită). Funcţia $h(u,v) = uv(u + v - 3) + 1$ este continuă pe compactul K deci îşi atinge minimul pe K. Un calcul simplu arată că acest număr este $u = 1$, $v = 1$ $h(1,1) = 0$ deci concluzia. În definitiv soluţia problemei este **cubul** $x = y = z = 1$.

7. Jacobianul este r etc.

8. Diferenţiabilitatea funcţiei F rezultă imediat (F este polinomială). Putem calcula mai general

$$dF(A)(B) = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0 \\ s \in \mathbb{R}}} \frac{F(A + sB) - F(A)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{(A + sB)(A + sB)^t - AA^t}{s} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^2BB^t - AA^t}{s} = \lim_{s \to 0} (BA^t + AB^t + sBB^t) = BA^t + AB^t$$

Pentru $A = I$ avem $dF(I)(B) = B + B^t$, $\forall\, B \in M(n)$.

9. a) 0.

b) Din $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x + y$ deducem $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + xy + b(y)$ cu b de clasă C^1. În definitiv $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \alpha(x) + \beta(y)$ cu $\alpha,\beta \in C^1(\mathbb{R})$

$$f(x,0) = \alpha(x) + \beta(0) = x,\ f(0,y) = \beta(y) + \alpha(0) = y^2.$$

Putem lua $\alpha(x) = x$, $\beta(y) = y^2$ şi obţinem funcţia $f(x,y) = \frac{xy}{2}(x + y) + x + y^2$.

10. $y = ax + b$. Expresia $E(a,b) = (a + b - 2)^2 + (2a + b)^2 + (3a + b - 1)^2$ este minimă. Se obţine $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (recomandăm desenul !).

LECŢIA A VII-A

FUNCŢII IMPLICITE, VARIETĂŢI DIFERENŢIABILE

INTRODUCERE

În această lecţie se prezintă problema funcţiilor implicite şi cîteva aplicaţii geometrice ale diferenţialei funcţiilor de mai multe variabile. Ideea centrală în studiul funcţiilor implicite este deducerea proprietăţilor **locale** (deci în vecinătatea unui punct) ale funcţiilor diferenţiabile, folosind proprietăţi corespunzătoare ale diferenţialei. Faptul că acest lucru este posibil justifică noţiunea de diferenţiabilitate şi corespunde ideii că funcţiile diferenţiabile se pot "aproxima local" cu funcţii liniare. În acelaşi context apare ideea de "formă canonică" pentru anumite tipuri de aplicaţii diferenţiabile. Pe scurt, în anumite coordonate alese convenabil, unele funcţii se reprezintă foarte simplu, permiţînd o rapidă înţelegere a proprietăţilor acestor funcţii.

Cadrul **varietăţilor diferenţiabile** scufundate în spaţii de tip $\mathbb{R}^n$ oferă un interesant cîmp de aplicaţii geometrice ale ideilor enunţate mai sus, cu o tendinţă crescîndă de utilizare în ingineria modernă, de exemplu în studiul sistemelor dinamice neliniare.

Din punct de vedere "practic", aproximarea funcţiilor diferenţiabile prin funcţii liniare permite o utilizare sistematică a algebrei liniare. Este necesară familiarizarea cu noţiunile de aplicaţie liniară, formă pătratică, rang etc., fără de care motivarea studiului apare ca insuficientă, dacă nu inexistentă.

1. Funcţii implicite

Reamintim că norma unei aplicaţii liniare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ şi că $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

TEOREMA VII. 1. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ un deschis şi $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă pe A astfel încît

$$\exists\, k > 0,\ \forall\, x \in A,\ \|df(x)\| \leq k.$$

Atunci pentru orice $a,b \in A$ astfel încît $[a,b] \subset A$, avem

$$\|f(b) - f(a)\| \le k\|b - a\|.$$

DEMONSTRAŢIE. Reamintim că $[a,b] = \{x;\ x = a + t(b - a),\ 0 \le t \le 1\}$.
Definim funcţia $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $\Phi(t) = f(a + t(b - a))$. Aplicînd teorema de diferenţiere a funcţiilor compuse, rezultă

$$\Phi'(t) = df(a + t(b - a))(b - a),\ 0 \le t \le 1$$

şi folosind ipoteza se deduce că $\|\Phi'(t)\| \le k\|b - a\|$, pentru orice $0 \le t \le 1$. Folosind corolarul teoremei IV. 14, rezultă

$$\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \le k\|b - a\|.$$

Teorema rezultă observînd că $\Phi(1) = f(b)$ şi $\Phi(0) = f(a)$.

COROLAR. Fie $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă, unde $A \subset \mathbb{R}^n$ este un deschis nevid conex. Atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:
i) f este constantă pe A;
ii) $df(x) = 0$, $\forall\, x \in A$.

DEMONSTRAŢIE. Implicaţia i) $\Rightarrow$ ii) este evidentă.
"$\Leftarrow$" Fie $a \in A$. Mulţimea $M = \{x \in A;\ f(x) = f(a)\}$ este nevidă şi închisă în A. (f fiind diferenţiabilă, este continuă). Pe de altă parte, fie $b \in M$ şi $r > 0$ cu $B(b,r) \subset A$. Pentru orice $y \in B(b,r)$, $[b,y] \subset A$ şi folosind teorema anterioară, deducem $f(y) = f(b) = f(a)$. Deci $B(b,r) \subset M$, b fiind arbitrar în M. Rezultă că mulţimea M este deschisă (în A). Deci M este nevidă, închisă şi deschisă în deschisul conex A, deci $M = A$ şi f rezultă constantă.

Comentariu. Este remarcabil modul în care conexiunea este folosită pentru "globalizare", deci pentru "a lipi" rezultatele locale.

Definiţia VII. 1. Fie $A,B \subset \mathbb{R}^n$ deschişi (nevizi). O aplicaţie $f : A \to B$ se zice C^1 – **difeomorfism** dacă este bijectivă, de clasă C^1 şi cu inversa de clasă C^1.

TEOREMA VII. 2. Dacă $f : A \to B$ este un C^1 – **difeomorfism** şi $a \in A$, atunci $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un **izomorfism liniar**.

DEMONSTRAŢIE. Avem $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$ şi aplicînd teorema de diferenţiere a funcţiilor compuse rezultă (cu $b = f(a)$)

$$df(a) \circ df^{-1}(b) = id_{\mathbb{R}^n},\ df^{-1}(b) \circ df(a) = id_{\mathbb{R}^n},$$

deci $df(a)$ este un izomorfism.

OBSERVAŢIE. Din cele de mai sus rezultă următorul fapt interesant: dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $B \subset \mathbb{R}^m$ sunt deschişi şi $m \ne n$, nu există nici un C^1 – difeomorfism $f : A \to B$ ("dimensiunea" este un **invariant** pentru difeomorfisme). În adevăr, două spaţii vectoriale izomorfe au aceiaşi dimensiune. Un rezultat analog are loc şi pentru cazul C^0 (omeomorfisme), dar este mult mai dificil de demonstrat.

Teorema care urmează are o deosebită importanţă în Analiza matematică şi afirmă că într-un **anumit sens** teorema VII. 2 admite o reciprocă; anume

TEOREMA VII. 3. (teorema funcţiei inverse). Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1 într–o vecinătate a punctului $a \in \mathbb{R}^n$. Dacă aplicaţia $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un **izomorfism liniar**, atunci există vecinătăţi deschise V, W ale lui a respectiv a lui $b = f(a)$, astfel încît $f(V) \subset W$ şi $f|_V : V \to W$ să fie un C^1 – difeomorfism.

Înainte de a demonstra această teoremă, considerăm necesar să o comentăm puţin. Sunt de reţinut următoarele:

i) Teorema are un caracter **local**. Aşa se explică faptul că deşi am considerat (pentru comoditatea scrisului) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, contează comportarea funcţiei într–o vecinătate a punctului $a \in \mathbb{R}^n$.

ii) Chiar dacă $df(x)$ este izomorfism pentru orice punct x din $\mathbb{R}^n$, **nu** rezultă în general că f este bijectivă (pe **imagine**). În adevăr, este suficient să considerăm exemplul:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (e^x\cos y,\ e^x\sin y).$$

(deci forma **reală** a funcţiei e^z).

iii) Chiar local, problema bijectivităţii unei funcţii de clasă C^1 poate fi de o considerabilă dificultate. Importanţa deosebită a teoremei VII. 3 constă în aceea că reduce această problemă la problema mai simplă a bijectivităţii unei **aplicaţii liniare**. Ştim că bijectivitatea unei aplicaţii liniare se reduce la rîndul ei la a arăta că **un număr**, anume determinantul acelei aplicaţii, este **nenul**.

DEMONSTRAŢIE. Vom face această demonstraţie în cîteva etape.

1) Putem presupune că $df(a) = id_{\mathbb{R}^n}$. În adevăr notînd $df(a) = T$, este clar că pentru $g = T^{-1} \circ f$ avem $dg(a) = id_{\mathbb{R}^n}$ şi demonstrînd teorema pentru g o vom avea şi pentru f căci T este un izomorfism liniar (şi deci un C^1 – difeomorfism!). Vom presupune că $df(a) = id_{\mathbb{R}^n}$.

2) Există $\delta > 0$ astfel încît f este C^1 pe $B(a,\delta)$, $df(x)$ izomorfism şi

$$(*)\qquad \frac{1}{2}\|x - y\| \le \|f(x) - f(y)\| \le \frac{3}{2}\|x - y\|,\ \forall\, x,y \in B(a,\delta).$$

În adevăr considerăm aplicaţia $h = f - id_{\mathbb{R}^n}$ care este de clasă C^1 într-o vecinătate a lui a şi $dh(a) = 0$. Există deci $\delta > 0$ astfel încît h este C^1 pe

$B(a,\delta)$ şi $\|dh(x)\| \le 1/2$ pentru orice $x \in B(a,\delta)$. Aplicăm teorema VII. 1 funcţiei h şi deducem

$$\|f(x) - f(y) - (x-y)\| \le \frac{1}{2}\|x-y\|,\ \forall\, x,y \in B(a,\delta),$$

din care rezultă imediat (*).

3) Din prima inegalitate (*) rezultă că f este **injectivă** pe $B(a,\delta)$. În adevăr din $f(x) = f(y)$ rezultă imediat $x = y$. Mai mult, pentru orice $0 < r < \delta$

$$f(B(a,r)) \subset B(b,\frac{3}{2}r)\ (\|x-a\| < r \Rightarrow \|f(x) - b\| \le \frac{3}{2}\|x-a\| < \frac{3}{2}r).$$

4) Punctul decisiv şi cel mai dificil al demonstraţiei constă în a arăta că

$$\forall\, 0 < r < \delta,\ f(B(a,r)) \supset B(b,r/2)$$

Deci trebuie să arătăm că ecuaţia $f(x) = z$ are soluţie (unică) $x \in B(a,r)$ pentru orice $z \in B(b,r/2)$.

Vom aplica principiul contracţiei (teorema III. 2). Fie $0 < r < \delta$ şi să notăm $X = B'(a,r)$. X este un spaţiu metric **complet**. Să considerăm pentru $z \in B(b,r/2)$

$$F : X \to X;\ F(x) = -f(x) + x + z.$$

Este clar că $F(x) = x \Leftrightarrow f(x) = z$ (pentru a arăta că $F(X) \subset X$ avem

$$\|F(x) - a\| = \|-f(x) + b + x - a + z - b\| \le \frac{1}{2}\|x-a\| + \|z-b\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r).$$

Pentru a arăta că F este contracţie observăm că

$$\|F(x) - F(y)\| \le \frac{1}{2}\|x-y\| \quad \text{din (*)}$$

deci F are un **punct fix unic** $x \in B(a,r)$ (căci $\|F(x) - a\| < r$ aşa cum am arătat mai sus) deci ecuaţia $f(x) = z$ are soluţie **unică** în $B(a,r)$ pentru $z \in B(b,r/2)$.

5) Vom lua $W = B(b,\delta/3)$, $V = f^{-1}(W) \cap B(a,\delta)$ şi $f|_V$ va fi bijectivă de la V pe W.

6) Rămîne de arătat că inversa lui $f|_V$ este de clasă C^1 pe W. Să notăm această inversă cu φ. Este clar că prima inegalitate (*) arată **continuitatea** lui φ. Pentru a arăta că φ este C^1 pe W se verifică folosind continuitatea că $\forall\, x \in V$ $df^{-1}(x)$ satisface condiţia din definiţia diferenţiabilităţii pentru φ în punctul $f(x)$. Nu mai intrăm în amănunte. Continuitatea derivatelor parţiale ale lui φ rezultă apoi imediat din teorema diferenţialei funcţiilor compuse. Teorema VII. 3 este complet demonstrată.

În cele ce urmează, vom aplica teorema VII.3.a funcţiei inverse la studiul problemei funcţiilor implicite. Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ un deschis (nevid) şi $f : A \to \mathbb{R}^2$ o funcţie de clasă C^1. Mulţimea $Z_f = \{(x,y) \in A;\ f(x,y) = 0\}$ este **curba plană**

definită de f. Studiul curbelor plane prezintă un deosebit interes (este suficient să amintim cazul conicelor, grafica pe calculator etc.). Apare astfel ca foarte importantă înţelegerea "structurii" mulţimii Z_f, atît analitic cît şi geometric.

EXEMPLU.

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 1$ $\qquad Z_f = \varnothing$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad Z_f = \{(0,0)\}$

c) $f(x,y) = y - x^2$ $\qquad Z_f = \{(x,y);\ y = x^2\}$

deci Z_f este graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ (parabola).

Observăm din aceste simple exemple că structura mulţimilor Z_f poate fi destul de diferită (în cazul general, mult mai complicată). Un alt mod de a pune problema este acela de a considera ecuaţia $f(x,y) = 0$ şi a încerca să "o rezolvăm" în sensul de a obţine de exemplu y ca funcţie de x; din dependenţa implicită a variabilelor x şi y să putem (cel puţin teoretic) "explicita" y ca funcţie de x (deci de a reprezenta mulţimea soluţiilor ecuaţiei $f(x,y) = 0$ ca un grafic).

Fie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ identificat natural cu $\mathbb{R}^{n+m}$; folosim notaţia $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (desigur $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_m)$). Pentru o funcţie diferenţiabilă $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, notată $f(x,y)$, $f = (f_1,\ldots,f_m)$, vom nota pe scurt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ & \ldots\ldots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{vmatrix}$$

Are loc următoarea importantă teoremă

TEOREMA VII. 4. (teorema funcţiilor implicite). Fie $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie de clasă C^1 în vecinătatea punctului $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, astfel încît:

i) $f(a,b) = 0$;

ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Atunci există mulţimi deschise $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $a \in A$, $b \in B$ şi o unică funcţie $g : A \to B$ ($g(a) = b$) astfel încît $g \in C^1(A)$ şi pe $A \times B$, avem $f(x,y) = 0$ dacă şi numai dacă $y = g(x)$, $\forall\, x \in A$.

DEMONSTRAŢIE. Considerăm funcţia $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F = (F_1,\ldots,F_{n+m})$, definită astfel:

$F_1(x,y) = x_1$

....

$F_n(x,y) = x_n$

$F_{n+1}(x,y) = f_1(x,y)$

....

$F_{n+m}(x,y) = f_m(x,y)$

$x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_m)$, $f = (f_1,\dots,f_m)$.

Este clar că F este de clasă C^1 în vecinătatea punctului (a,b), $F(a,b) = (a,0)$. Funcţia F verifică ipotezele teoremei funcţiei inverse în (a,b). În adevăr

$$\frac{D(F_1,\dots F_{n+m})}{D(x_1,\dots x_n,y_1,\dots y_m)}(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & . & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a,b) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a,b) & . & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a,b) \end{vmatrix}$$

deci este egal cu $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ şi nenul, prin ipoteză.

Există deci o vecinătate deschisă a punctului (a,b) pe care o putem presupune de forma $A \times B$ (cu A deschisă în $\mathbb{R}^m$, $a \in A$, B deschisă în $\mathbb{R}^m$, $b \in B$) astfel încît $F|_{A \times B} : A \times B \to W$ este un C^1 – **difeomorfism**. Avînd în vedere definiţia funcţiei F rezultă că $F^{-1}(x,y) = (x,h(x,y))$ cu h de clasă C^1. Deducem că $f(x,h(x,y)) = y$ pentru orice $(x,y) \in W$ (F şi F^{-1} sunt inverse una alteia!). În particular, $f(x,h(x,y)) = y$ pentru orice $x \in A$ şi putem lua $g(x) = h(x,0)$. Verificarea amănunţită a faptului că g satisface toate concluziile teoremei o lăsăm în seama cititorului.

Vom arăta că derivatele parţiale ale funcţiei g mai sus definite pot fi calculate cu uşurinţă (chiar dacă g este din punct de vedere **practic** greu de obţinut). În adevăr, cu notaţiile şi ipotezele teoremei VII. 4, avem

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x,g(x)) = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &f_m(x,g(x)) = 0 \end{aligned}\right. \qquad \forall x \in A$$

Pentru orice j, $1 \le j \le n$, obţinem derivînd relaţiile de mai sus în raport cu x_j:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x,g(x)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x,g(x))\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) = 0 \qquad \forall x \in A$$

....

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x,g(x)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(x,g(x))\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) = 0$$

Pentru j fixat, $x = a$, $g(x) = b$, interpretăm relaţiile de mai sus ca un sistem liniar cu necunoscutele $\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(a),\dots,\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(a)$. Determinantul acestui sistem este $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ şi sistemul are soluţie unică, ce poate fi obţinută prin formulele lui Cramer.

EXEMPLU. $n = m = 1$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 $f(a,b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ atunci există g ca în teoremă şi $g'(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)/\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.

Într-adevăr, derivăm în raport cu x, identitatea $f(x,g(x))' = 0$; se obţine: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g'(x) = 0$ şi înlocuim $x = a$, $b = g(a)$.

OBSERVAŢIE. Teorema VII. 4 are un caracter local. De exemplu, ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$ în $\mathbb{R}^2$ are în $[-1,1]$ soluţiile $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Pentru $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soluţia este unică, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, în vecinătatea punctului a.

Remarcăm că dacă în teoremele VII. 3, VII. 4 funcţiile din ipoteză sunt de clasă C^k ($k \ge 1$), atunci în VII. 3 se obţine un difeomorfism de clasă C^k, iar în VII. 4, soluţia g este tot de clasă C^k.

2. Teorema rangului. Dependenţă funcţională

Definiţia VII. 2. Dacă aplicaţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \mathbb{R}^n$, se numeşte **rangul lui f în a**, rangul aplicaţiei liniare $df(a)$.

Are loc următorul rezultat important:

TEOREMA VII. 5. (teorema rangului). Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1 în vecinătatea unui punct $a \in \mathbb{R}^n$, $b = f(a)$. Presupunem că rangul lui f este constant, egal cu k, pe o vecinătate a lui a. Atunci există o vecinătate U a lui a, o vecinătate V a lui b, cu $f(U) \subset V$, precum şi vecinătăţi U_1, V_1 ale originii din $\mathbb{R}^n$ şi respectiv din $\mathbb{R}^m$, astfel încît să avem o diagramă comutativă de

forma dată mai jos unde φ,ψ sunt difeomorfisme, $\varphi(0) = 0$, $\psi(b) = 0$ şi

$$\rho(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_k,0,...,0).$$

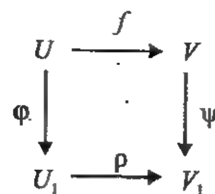


Fig. VII. 1.

Comentariu. Intuitiv, teorema se poate formula astfel: dacă aplicația f are un rang constant k, atunci pînă la schimbări de coordonate, f coincide cu aplicația $(x_1...x_n) \mapsto (x_1...x_k,0...0)$.

DEMONSTRAȚIE. Putem presupune fără a scădea generalitatea că $a = 0$, $b = 0$. Cum f are un rang constant k pe o vecinătate a lui $a = 0$, matricea $J_f(0)$ conține un $k \times k$ **minor nenul**. Se poate presupune că acest minor este chiar $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right)$, $1 \le i,j \le k$, unde $f = (f_1,...,f_m)$. (În adevăr totul revine la o numerotare a coordonatelor ceea ce este o schimbare de coordonate!). Cum $f \in C^1$ minorul $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ e **nenul** pentru x într-o vecinătate a lui 0.
Să definim în această vecinătate a originii funcția φ prin formula

$$\varphi(x_1,...,x_n) = (f_1(x),...,f_k(x),x_{k+1},...,x_n), \quad x = (x_1,...,x_n);$$

φ are valori în $\mathbb{R}^n$. Un calcul **imediat** arată că $\det J_\varphi = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le k} \ne 0$ în vecinătatea respectivă. Conform teoremei funcției inverse φ e un difeomorfism într-o vecinătate a lui 0 pe o vecinătate a lui $\varphi(0) = 0$. Avem deci o diagramă comutativă cu φ – difeomorfism:

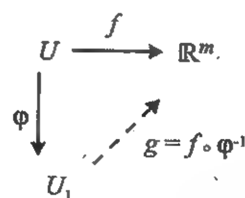


Fig. VII. 2.

Vom presupune U suficient de mică pentru ca f să aibă rang constant k pe U. Să considerăm aplicația $g = f \circ \varphi^{-1}$. Pentru a înțelege mai bine definiția aplicației g, scriem pe elemente:

$$(x_1,...,x_n) \overset{f}{\mapsto} (f_1(x),...,f_m(x))$$

$$\varphi \downarrow \quad \nearrow g$$

$$(f_1(x),...,f_k(x),x_{k+1},...,x_n)$$

$$\|$$

$$(z_1,...,z_n)$$

deci $\quad z = (z_1,...,z_n) \underset{g}{\mapsto} (z_1,...,z_k,g_{k+1}(z),...,g_m(z))$.

Este clar că matricea jacobiană a lui g va arăta astfel

$$J_g(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & A(z) \end{pmatrix} \text{ unde } A(z) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_i}\right);\ k+1 \le j \le m,\ k+1 \le i \le n.$$

Punctul decisiv constă în observația că din cauză că pe U rangul lui f e constant k şi φ e difeomorfism, rangul lui g pe U_1 e constant k şi deci $A(z)$ e nulă pe U_1, adică

$$(*) \qquad \frac{\partial g_j}{\partial z_i} = 0;\ k+1 \le j \le m,\ k+1 \le i \le n.$$

Să definim acum în vecinătatea lui $0 \in \mathbb{R}^m$ aplicația

$$\psi(y_1,...,y_m) = (y_1,...,y_k,y_{k+1} - g_{k+1}(y_1,...,y_k,0,...0),...,y_m - g_m(y_1,...,y_k,0,...,0))$$

Avem:

$$J_\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci ψ e un difeomorfism local în jurul lui 0 în $\mathbb{R}^m$. Să observăm că

$\psi\circ g(z_1,\ldots,z_n) = (z_1,\ldots,z_k, g_{k+1}(z) - g_{k+1}(z_1,\ldots,z_k,0,\ldots,0),\ldots, g_m(z) - g_m(z_1,\ldots,z_k,0,\ldots,0))$.

Folosind (*) deducem că într-o vecinătate suficient de mică a lui $z = 0$,

$$g_{k+1}(z) = g_{k+1}(z_1,\ldots,z_k,0,\ldots 0) \ \ldots \ g_m(z) = g_m(z_1,\ldots,z_k,0,\ldots 0).$$

Renotînd U, U_1, V, V_1 vecinătăţile corespunzătoare (cu restrîngere eventuală), rezultă că $\psi\circ g = \psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ se comportă astfel:

$$(z_1,\ldots,z_n) \mapsto (z_1,\ldots,z_k,0,\ldots,0),$$

ceea ce era de dovedit.

Reamintim că dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară între două spaţii vectoriale reale finit dimensionale ($\dim V = n$, $\dim W = m$), atunci **rangul** r al lui f este dimensiunea imaginii lui f şi coincide cu rangul matricii asociate lui f relativ la o pereche oarecare de baze în spaţiile V şi W. Totodată $r = \dim(\mathrm{Im} f) = n - \dim(\mathrm{Ker} f)$; unde $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0)$. Evident, f este surjectivă $\Leftrightarrow r = m$ şi f este injectivă $\Leftrightarrow r = n$.

În cele ce urmează, dăm cîteva cazuri particulare ale teoremei rangului:

1) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ un deschis şi $f : A \to \mathbb{R}^m$ ($m \geq n$) o aplicaţie de clasă C^1. Dacă rangul lui f este constant, egal cu n (adică diferenţiala $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este injectivă), atunci există vecinătăţi aşa cum se indică în teorema rangului astfel încît $\rho(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$ este injecţia canonică.

2) Dacă $m \leq n$ şi rangul lui f este constant egal cu m (deci $df(a)$ este surjectivă), atunci $\rho(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_m)$.

3) Combinînd cazurile 1), 2) şi presupunînd că $m = n$ şi că $df(a)$ este un izomorfism, rezultă că ρ este aplicaţia identică a lui $\mathbb{R}^n$.

Revenim la cazul general şi presupunem că $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o aplicaţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ şi fie $a \in A$. În cazul cînd aplicaţia $df(a)$ este injectivă, se spune că f este o **imersie** în punctul a. Dacă $df(a)$ este surjectivă, se spune că f este o **submersie** în a. Aplicaţia f este numită imersie (respectiv submersie) pe A dacă este astfel în orice punct din A.

OBSERVAŢIE. Dacă $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $f \in C^1(A)$ şi dacă rangul lui f în $a \in A$ este k, atunci există o vecinătate V a lui a pe care rangul lui f este $\geq k$ (adică în vecinătatea lui a rangul tinde să crească). În adevăr, în matricea $J_f(a)$ există un minor de ordin k nenul. Prin continuitate acest lucru se întîmplă pe o vecinătate a lui a deci rangul lui f în fiecare punct din vecinătatea respectivă este cel puţin k.

Definiţia VII. 3. Funcţiile $f_1,\ldots,f_m : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^n$, A deschis) de clasă C^1 se zic **independente pe** A dacă rangul aplicaţiei $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1,\ldots,f_m)$ este m în fiecare punct din A.

Să remarcăm că independenţa funcţiilor $f_1,\ldots,f_m$ pe A revine la liniar independenţa formelor liniare $df_1(x),\ldots,df_m(x)$ în orice punct $x \in A$ sau, ceea ce

este echivalent, la faptul că $f = (f_1,\ldots,f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ este **submersie** în orice punct din A.

Următoarea teoremă justifică terminologia de mai sus.

TEOREMA VII. 6. (relativ la dependenţa funcţională). Fie $f_1,\ldots,f_m$ de clasă C^1 şi independente pe deschisul (nevid) $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît să existe funcţii $\lambda_1,\ldots,\lambda_m : A \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$dg(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) df_i(x), \ \forall x \in A.$$

Atunci pentru orice $a \in A$ există o vecinătate U a lui a în A, o vecinătate V a lui $b = f(a)$ ($f = f_1,\ldots,f_m$)) în $\mathbb{R}^m$ şi o funcţie $\theta : V \to \mathbb{R}$ astfel încît

$$g(x) = \theta(f_1(x),\ldots,f_m(x)), \ \forall x \in U$$

(adică $g = \theta\circ f$ pe U).

DEMONSTRAŢIE. Dacă $f_1 = \pi_1,\ldots,f_m = \pi_m$ sunt proiecţiile canonice, atunci teorema revine la faptul că dacă $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 0$, $k = m + 1,\ldots,n$ într-o vecinătate a lui $a \in \mathbb{R}^n$, atunci $g = g(x_1,\ldots,x_m)$ într-o vecinătate a lui a (g **nu depinde** de $x_{m+1},\ldots,x_n$ în vecinătatea lui a) ceea ce este aproape evident.

Revenind la cazul general, din condiţiile puse, rezultă că $f = (f_1,\ldots,f_m)$ este **submersie** în orice punct din A. Este uşor de văzut că atît ipotezele teoremei cît şi concluzia se conservă prin C^1 – difeomorfisme. Dar forma canonică a submersiilor este exact $(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ ca mai sus, ceea ce demonstrează teorema.

COROLAR. Fie $f_k(x_1,\ldots,x_n)$, $1 \leq k \leq m$ funcţii de n variabile ($n \geq m$) de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, cu valori reale. Dacă rangul matricii jacobiene a lui $f = (f_1,\ldots,f_m)$ este constant r, atunci funcţiile $f_1,\ldots,f_m$ satisfac local $m - r$ relaţii funcţionale (într-un sens care va fi precizat).

DEMONSTRAŢIE. Fie $\forall a \in A$ fixat şi presupunem că

$$\frac{D(f_1,\ldots,f_r)}{D(x_1,\ldots,x_r)} \neq 0$$

într-o vecinătate a lui a (ceea ce se obţine prin reordonarea eventuală a lui $f_1,\ldots,f_m$ şi $x_1,\ldots,x_n$). Liniile $r + 1,\ldots,m$ ale matricei jacobiene a lui f sunt combinaţii liniare de primele r linii şi rezultă relaţii de forma

$$df_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} \cdot df_j, \ r + 1 \leq i \leq m.$$

Conform teoremei VII. 6, există funcţii $\theta_{r+1},\ldots,\theta_m$ de r variabile astfel încît $f_i = \theta_i(f_1,\ldots,f_r)$ pentru $r + 1 \leq i \leq m$, în vecinătatea lui a. Se obţin astfel $m - r$

relații între funcțiile $f_1,...,f_m$.

EXEMPLUL 1. Funcțiile $f_1(x,y) = \sin xy$, $f_2(x,y) = \cos xy$ sunt dependente funcțional, deoarece rangul matricii lor jacobiene este 1; dealtfel, $f_1^2 + f_2^2 = 1$ în $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLUL 2.
Fie $f_1(x,y,z) = x + y + z$, $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ și $f_3(x,y,z) = xy + yz + zx$. Matricea jacobiană are rangul 2 deci f_1,f_2,f_3 satisfac în vecinătatea oricărui punct o relație funcțională ($m = n = 3$, $r = 2$); dealtfel $f_2 = f_1^2 - 2f_3$ deci punînd $\theta(y_1,y_2) = y_1^2 - 2y_2$, rezultă că $f_2 = \theta(f_1,f_3)$.

3. Varietăți diferențiabile

Definiția VII. 4. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ un deschis. O aplicație $f : D \to \mathbb{R}^m$ se numește **netedă** dacă toate cele m componente sunt de clasă $C^\infty(D)$. Dacă $X \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime oarecare, o aplicație $f : X \to \mathbb{R}^m$ se zice **netedă**, dacă $\forall\, x \in X$ există există o vecinătate deschisă U a lui x în $\mathbb{R}^n$ și o aplicație $F : U \to \mathbb{R}^m$ netedă, astfel încît $F|_{U \cap X} = f$.

Proprietatea unei funcții de a fi netedă este locală (adică este suficient de verificat în vecinătatea oricărui punct fixat). O aplicație $f : X \to Y$, ($X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$) se zice **netedă** dacă aplicația $X \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x)$ este netedă. Compunerea a două funcții netede este netedă. O aplicație $f : X \to Y$ ($X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$) se zice un **difeomorfism** dacă este bijectivă și f, f^{-1} sunt netede.

Definiția VII. 5. O submulțime $X \subset \mathbb{R}^N$ se numește **varietate diferențiabilă netedă de dimensiune** n dacă $\forall\, x \in X$, există o vecinătate V a lui x în X și un difeomorfism $\varphi : U \to V$, cu U deschis în $\mathbb{R}^n$. Aplicația φ se mai numește **parametrizare** a lui V, φ^{-1} se numește **sistem de coordonate** iar perechea (U,φ^{-1}) se numește **hartă** a lui X. Componentele lui φ^{-1} se mai numesc **funcții de coordonate**.

Dacă $\varphi : U \to V$ este o parametrizare locală în x, atunci pentru orice difeomorfism $f : U' \to U$, $\varphi \circ f$ este deasemenea o parametrizare locală în x. Dacă $\psi_1 : V_1 \to U_1$, $\psi_2 : V_2 \to U_2$ sunt sisteme de coordonate locale în x, atunci $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2) \to \psi_2(V_1 \cap V_2)$ este un difeomorfism (numit schimbare locală de coordonate). De aici rezultă că dimensiunea unei varietăți este neambiguă (difeomorfismele între deschiși invariază dimensiunea).

Dăm în continuare exemple de varietăți.

EXEMPLUL 1. $\mathbb{R}^n$ este o varietate netedă n – dimensională (parametrizată prin aplicația identică). Similar, orice deschis nevid $D \subset \mathbb{R}^n$ este o varietate n – dimensională. Mai general, dacă X este o varietate netedă n – dimensională, atunci orice deschis nevid al lui X este la fel.

EXEMPLUL 2. Fie V un spațiu vectorial n – dimensional, $V \subset \mathbb{R}^N$. Atunci V este o varietate netedă n – dimensională difeomorfă cu $\mathbb{R}^n$. În adevăr, alegem o bază $e_1,...,e_n$ în V. Aplicația $\mathbb{R}^n \to V$, $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1e_1 + ... + x_ne_n$ este un difeomorfism.

EXEMPLUL 3. Orice mulțime dintr-un spațiu $\mathbb{R}^N$, difeomorfă cu o varietate netedă n – dimensională este o varietate netedă n – dimensională. În adevăr, fie $f : X \to Y$ un difeomorfism și X o varietate. Dacă $\varphi : U \to V$ este o parametrizare locală în $x \in X$, atunci $f \circ \varphi$ va fi o parametrizare locală a lui Y în $f(x)$. Ca o aplicație a acestui fapt, rezultă că dacă $X \subset \mathbb{R}^N$ și $f : X \to \mathbb{R}$ este o funcție netedă, atunci X și graficul G_f al lui f sunt difeomorfe, prin aplicația $X \to G_f$, $x \mapsto (x,f(x))$.

EXEMPLUL 4. O mulțime local difeomorfă cu o varietate netedă n – dimensională este deasemenea o varietate n – dimensională. De aici rezultă următoarea clasă de exemple: Fie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o aplicație netedă astfel încît $dF(a)$ are rang maxim în orice punct $a \in \mathbb{R}^n$. Atunci mulțimea $X = F^{-1}(0)$, presupusă nevidă este o varietate $(n - 1)$ – dimensională. Pentru demonstrație se utilizează teorema funcțiilor implicite. Rezultatul se extinde la aplicații netede $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n \geq m)$, de rang maxim.

CAZURI PARTICULARE.
- curbele plane netede (pentru $n = 2$, $m = 1$)
- suprafețele netede în spațiu (pentru $n = 3$, $m = 1$)
- curbele netede în spațiu (pentru $n = 3$, $m = 2$)
- sfera unitate n – dimensională $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$
(luînd $F(x_1,...,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 - 1$).

EXEMPLUL 5. Dacă X este o varietate netedă de dimensiune n și Y o varietate netedă de dimensiune m, atunci produsul cartezian $X \times Y$ este o varietate netedă de dimensiune $m + n$. Demonstrația este imediată. Dacă S^1 este cercul unitate în plan, atunci cilindrul $S^1 \times \mathbb{R}$ este o varietate netedă de dimensiune 2. Similar torul $S^1 \times S^1$ este o varietate 2 – dimensională.

4. Spațiu tangent, cîmp de vectori

Fie X o varietate netedă de dimensiune n în $\mathbb{R}^N$, $x \in X$ și $\varphi : U \to X$ o parametrizare locală în x. Aplicația $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ este netedă și fie $a \in X$ astfel încît $\varphi(a) = x$. În aceste condiții se poate considera diferențiala $d\varphi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.

Definiţia VII. 6. Se numeşte **spaţiu tangent la varietatea** X **în punctul** x, imaginea aplicaţiei $d\varphi(a)$; el este notat $T_x(X)$.
Aşadar, $T_x(X) = \operatorname{Im} d\varphi(a)$ este subspaţiu vectorial real al lui $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA VII. 7. Această definţie este corectă (în sensul că spaţiul $T_x(X)$ nu depinde de parametrizarea locală φ).

DEMONSTRAŢIE. Fie (U',φ') o altă parametrizare şi $b \in U'$ ales cu $\varphi'(b) = x$. Restrîngînd U şi U', putem presupune că $\varphi(U) = \varphi'(U')$ şi că avem o diagramă comutativă de forma

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \\ \theta \downarrow & & \mathbb{R}^N \\ U' & \xrightarrow{\varphi'} & \end{array}$$

unde θ este un difeomorfism, $\theta(a) = b$. Aşadar, $\varphi(a) = \varphi'(b) = x$ şi $\varphi'\circ\theta = \varphi$. Trecînd la diferenţiale şi aplicînd teorema VI. 6, rezultă $d\varphi(a) = d\varphi'(b)\circ d\theta(a)$, cu $d\theta(a)$ izomorfism. De aici rezultă că $\operatorname{Im} d\varphi(a) = \operatorname{Im} d\varphi'(b)$, ceea ce încheie demonstraţia.

OBSERVAŢIE. $x + T_x(X) = \{x + v \mid v \in T_x(X)\}$ este numit spaţiul tangent **geometric** (sau **afin**) la varietatea X în punctul x.

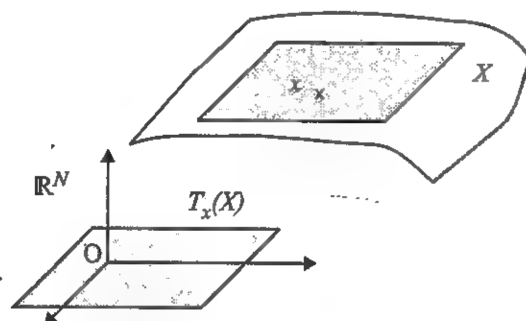


Fig. VII. 3.

Un **vector tangent** la X în x este o pereche (x,v) cu $v \in T_x(X)$. În acest mod, spaţiile tangente la X în puncte x,y distincte ale varietăţii X, sunt disjuncte. Deşi $T_x(X)$ şi $T_y(X)$ au intersecţie nevidă, nu există vectori tangenţi simultan la X în x şi în y.

TEOREMA VII. 8. Dacă X este o varietate netedă de dimensiune n, atunci pentru orice $x \in X$, avem $\dim_{\mathbb{R}} T_x(X) = n$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\varphi : U \to X$ o parametrizare în x, $\varphi(a) = x$, cu $a \in U$ şi W un deschis în $\mathbb{R}^N$ astfel încît pe W este definită aplicaţia Φ care extinde φ^{-1}.

Atunci $\Phi\circ\varphi$ este 1_U (Φ are imaginea în $\mathbb{R}^n$), iar compunerea

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{d\varphi(a)} T_x(X) \xrightarrow{d\Phi(x)} \mathbb{R}^n$$

este aplicaţia identică a lui $\mathbb{R}^n$. Rezultă că $d\varphi(a)$ este injectivă. Deoarece $T_x(X) = \operatorname{Im} d\varphi(a)$, rezultă că $d\varphi(a) : \mathbb{R}^n \to T_x(X)$ este un izomorfism şi ca atare, $\dim_{\mathbb{R}} T_x(X) = n$.

OBSERVAŢIE. Dacă $\{e_1,\dots,e_n\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$, atunci cu notaţiile din definiţia VII. 6, vectorii $\partial_{ix} = d\varphi(a)(e_i)$, $1 \le i \le n$, formează o bază pentru $T_x(X)$, numită **bază mobilă**.

EXEMPLUL 1. Fie $X = \mathbb{R}^n$. Pentru orice $x \in X$, avem $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Astfel un vector tangent în x la $\mathbb{R}^n$ este o pereche (x,v) cu $v \in \mathbb{R}^n$.

EXEMPLUL 2. Dacă $V \subset \mathbb{R}^N$ este un spaţiu vectorial real de dimensiune n, atunci folosind parametrizarea $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$, pentru o bază fixată a lui V, rezultă că $T_x(V) = V$, $\forall\, x \in V$.

EXEMPLUL 3. Ne propunem să determinăm spaţiul tangent la

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

într-un punct $M = (a,b) \in S^1$. Presupunem $b > 0$ deci $b = \sqrt{1-a^2}$ şi folosim parametrizarea $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$, unde $U = (-1,1)$; $\varphi(a) = M$. Diferenţiala $d\varphi(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ este aplicaţia

$$d\varphi(a)(u) = \left(u, -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}u\right) = \left(u, -\frac{a}{b}u\right)$$

şi $T_{(a,b)}S^1 = \operatorname{Im} d\varphi(a) =$ spaţiul 1 – dimensional al vectorilor $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ cu $v = -\frac{a}{b}u$. Recunoaştem aici vectorii perpendiculari pe OM. Dacă $M = (1,0)$, considerăm parametrizarea

$$\psi : V \to \mathbb{R}^2,\ \psi(y) = (\sqrt{1-y^2}, y),\ \psi(0) = M \text{ şi } V = (-1,1).$$

În acest caz, $d\psi(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ este aplicaţia $d\psi(0)(u) = (0,u)$, deci $\operatorname{Im} d\psi(0)$ este formată din vectori paraleli cu axa Oy etc. Se constată că în toate cazurile, $T_M S^1$ este subspaţiul lui $\mathbb{R}^2$ format din vectorii perpendiculari pe dreapta OM, adică subspaţiul lui $\mathbb{R}^2$ generat de vectorul $(-b,a)$.

TEOREMA VII. 9. Fie $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$, $m \le N$ o aplicaţie netedă de rang maxim m. Atunci $X = F^{-1}(0)$ este o varietate netedă de dimensiune $n = N - m$ şi pentru orice $x \in X$, $T_x(X) = \operatorname{Ker} dF(x)$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\varphi : U \to X$ o parametrizare, $a \in U$ şi $\varphi(a) = x$. Avem $F \circ \varphi = 0$ (aplicaţia nulă pe U) deci $d(F \circ \varphi)(a) = 0$ şi ca atare, $dF(x) \circ d\varphi(a) = 0$. Rezultă că $\operatorname{Im} d\varphi(a) \subset \operatorname{Ker} dF(x)$ adică $T_x(X) \subset \operatorname{Ker} dF(x) \subset \mathbb{R}^N$.

Din algebra liniară se cunosc următoarele rezultate:

- dacă $u : V \to W$ este o aplicaţie liniară între două spaţii vectoriale cu $\dim V < \infty$, atunci $\dim \operatorname{Im} u = \dim V - \dim \operatorname{Ker} u$.
- dacă $W_1 \subset W_2 \subset V$ sunt două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial finit dimensional V şi dacă $\dim W_1 = \dim W_2$ atunci $W_1 = W_2$.

Revenind la situaţia anterioară, rezultă

$$m = \dim \operatorname{Im} dF(x) = N - \dim \operatorname{Ker} dF(x)$$

deci $\dim \operatorname{Ker} dF(x) = N - m$. Dar $\dim T_x(X) = n = N - m$, conform teoremei VII. 8. În definitiv, rezultă că $T_x(X) = \operatorname{Ker} dF(x)$.

EXEMPLU. Fie aplicaţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. În acest caz $F^{-1}(0) = S^1$ şi pentru orice $(a,b) \in S^1$, $dF(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto 2au + 2bv$. Ca atare $T_{(a,b)}S^1 = \operatorname{Ker} dF(a,b) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2au + 2bv = 0\}$ = subspaţiul lui $\mathbb{R}^2$ generat de vectorul $(-b,a)$. Regăsim astfel rezultatul din exemplul 3.

Definiţia VII. 7. Fie X o varietate netedă. A da un **cîmp de vectori** v pe un deschis $U \subset X$ revine la a asocia oricărui punct $x \in U$ un vector tangent $v(x) \in T_x(X) = T_x(U)$.

Dacă v,w sunt două cîmpuri de vectori pe U şi dacă $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, atunci se definesc cîmpurile de vectori $v + w$, fv.

Fie $n = \dim X$, $x \in X$ şi $\partial_{1x},\ldots,\partial_{nx}$ baza mobilă a lui $T_x(X)$. Atunci pentru orice cîmp de vectori v în U există funcţii $f_1,\ldots,f_n : U \to \mathbb{R}$, numite **componentele lui** v, astfel încît $\forall\, x \in U$, $v(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\partial_{ix}$. Cîmpul v se zice **neted** dacă componentele lui sunt funcţii netede.

Dacă v şi w sunt două cîmpuri netede pe un deschis $U \subset X$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i\,,\quad w = \sum_{i=1}^{n} g_i\partial_i\,,$$

atunci **paranteza Poisson** a lor este cîmpul de vectori $[v,w]$ definit prin

$$[v,w] = \sum_{i=1}^{n} h_i\partial_i\,,\ \text{unde}\ h_i = \sum_{j=1}^{n}\left(f_j\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right).$$

Astfel, $[\partial_i,\partial_j] = 0$ pentru $1 \le i,j \le n$, $[v,w] = -[w,v]$, $[v,v] = 0$.

5. Extreme cu legături

Ca o aplicaţie a celor de mai sus, vom demonstra teorema multiplicatorilor lui J. P. LAGRANGE (1736 – 1813).

Fie $M \subset \mathbb{R}^k$ o submulţime (nevidă), $a \in M$ şi f o funcţie definită într-o vecinătate a lui a în $\mathbb{R}^k$. Spunem că $a \in M$ este un **punct de extrem pentru** f **cu legătura** M (sau **extrem condiţionat**) dacă a este extrem local pentru $f|_M$ (**restricţia** lui f la M).

TEOREMA VII. 10. Fie $g_1,\ldots,g_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ aplicaţii de clasă C^1, independente într-o vecinătate a punctului $a \in \mathbb{R}^k$ şi $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasa C^1 în vecinătatea lui a. Să presupunem că a este un punct de extrem pentru f cu legătura $M = \{x \mid g_1(x) = \ldots = g_m(x) = 0\}$ (deci $a \in M$). Atunci există $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$df(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dg_i(a)\,.$$

(numerele $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ se numesc **multiplicatori Lagrange**).

DEMONSTRAŢIE. Din ipoteză rezultă că M este într-o vecinătate a punctului $a \in M$ o varietate de clasă C^1 şi dimensiunea $k - m = n$ (notaţie). În plus, $T_aM = \operatorname{Ker} dg(a)$, $\dim_{\mathbb{R}} T_aM = n$. Fie $h : U \to \mathbb{R}^k$, U deschis în $\mathbb{R}^n$ o parametrizare pentru M în vecinătatea lui a şi $c \in U$, $h(c) = a$. Atunci

$$T_aM = \operatorname{Im} dh(c) = \operatorname{Ker} dg(a).$$

Pe de altă parte, din condiţii rezultă clar că funcţia $f \circ h = F$ are un extrem (liber) în $c \in U$, deci conform teoremei Fermat avem $dF(c) = 0$ deci $d(f \circ h)(c) = 0$ sau

$$df(a) \circ dh(c) = 0.$$

Deci $df(a)$ se anulează (ca aplicaţie) pe $\operatorname{Im} dh(c)$. Deci $df(a)$ este nulă pe $\operatorname{Ker} dg(a)$. Avem următoarea situaţie: aplicaţiile liniare $dg_1(a),\ldots,dg_m(a)$ sunt forme liniare independente şi $df(a)$ este nulă pe

$$\operatorname{Ker} dg(a) = \{dg_1(a) = \ldots = dg_m(a) = 0\}.$$

Este un rezultat simplu de algebră liniară că în acest caz există şi sunt unici scalari $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R}$ cu

$$df(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dg_i(a)\,.$$

şi teorema este demonstrată.

COROLAR. Fie $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis din

$\mathbb{R}^{n+m}$ şi presupunem că există m legături

$$g_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0,\dots,g_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0.$$

Presupunem că $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$ este un punct de extrem pentru f cu legăturile $g_i = 0$. Dacă $g_1,\dots,g_m$ sunt funcţii de clasă C^1 şi

$$\frac{D(g_1,\dots,g_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m) \neq 0,$$

atunci există $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}$ astfel încît punînd

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m,$$

să rezulte

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0\ ,\ g_i = 0\ \ (1 \le j \le n,\ 1 \le k \le m,\ 1 \le i \le m).$$

EXEMPLUL 1. Fie $f(x,y)$ cu legătura $g(x,y) = 0$. Considerăm funcţia $F = f + \lambda g$. Atunci extremele condiţionate ale lui f se determină rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0\ ,\ g = 0.$$

EXEMPLUL 2. Extremele unei funcţii $f(x,y,z)$ cu legăturile $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$ se determină astfel: se consideră funcţia $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ şi se rezolvă sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0\ ,\ g_1 = 0\ ,\ g_2 = 0.$$

EXEMPLUL 3. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ şi fie $K \subset A$ un compact a cărui frontieră poate fi definită prin ecuaţii carteziene. Deoarece f este continuă, ea este mărginită pe K şi îşi atinge extremele globale, adică există puncte $a,b \in K$ astfel încît $f(a) = \inf_K f$, $f(b) = \sup_K f$. Dacă $a \in \mathring{K}$, atunci a este punct de minim local pentru f deci $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, $1 \le k \le n$. Dacă $a \notin \mathring{K}$, atunci $a \in K \setminus \mathring{K} = \mathrm{Fr}K$ şi a va fi punct de minim pentru f cu legăturile date de faptul că a verifică ecuaţiile carteziene ale frontierei. O discuţie similară are loc pentru punctul de maxim b.

Concret, să determinăm marginile (extremele globale) ale lui $f(x,y) = x^2 + 2xy$ pe compactul $K = \{x^2 + y^2 \le 1\}$. Se observă mai întîi că originea este singurul punct critic pentru f, dar nu este un extrem. Atunci marginile lui f sunt atinse pe frontieră (căci dacă ar fi atinse în interior, ar rezulta că sunt critice). Avem deci de aflat extremele lui f cu legătura $x^2 + y^2 = 1$. Considerînd $F(x,y) = x^2 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ şi rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0\ ,\ x^2 + y^2 = 1,\ \text{rezultă}\ \inf_K = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ \text{şi}\ \sup_K = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. 10 exerciţii

1. Să se indice doi deschişi $U, V \subset \mathbb{R}^n$ şi o aplicaţie $f : U \to V$ bijectivă astfel încît f să fie de clasă C^1 dar nu difeomorfism.

2. Să se arate că un deschis $U \subset \mathbb{R}^n$ şi un deschis $V \subset \mathbb{R}^m$, pentru $m \neq n$, nu pot fi difeomorfi.

3. Fie $0 < a < 1$ constant. Se consideră funcţia $y = y(x)$ prin relaţia $y - a\sin y = x$. Să se calculeze $y'(x)$, $y''(x)$.

4. Fie φ o funcţie de clasă C^1. Relaţia $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$ cu $a,b,c \in \mathbb{R}$ constante, defineşte implicit z ca funcţie de x şi y. Să se arate că

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

5. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hiperboloidul $H = \{x^2 + y^2 - z^2 = a\}$ este o varietate netedă de dimensiune 2.

6. Să se arate că mulţimea $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid xy = 0\}$ şi conul $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ nu sunt varietăţi.

7. Fie V o varietate de dimensiune m în $\mathbb{R}^M$ şi W o varietate de dimensiune n în $\mathbb{R}^N$. Să se arate că $V \times W$ este o varietate de dimensiune $m + n$ în $\mathbb{R}^{M+N}$.

8. Se cer punctele situate pe curba $x^2 + y^2 + xy = 1$, cele mai depărtate de origine.

9. Să se determine extremele lui:
a) $f(x,y,z) = xyz$ cu legătura $x + y + z = 1$.
b) $f(x,y,z) = x + y + z$ cu legăturile $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x + 2y + z = 1$.

10. Să se determine $\inf_K f$, $\sup_K f$ în fiecare din cazurile următoare:

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, $K = \{x^2 \le 1, 0 \le y \le x^2\}$;
b) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$, $K = \{x^2 + y^2 + 2z^2 \le 8\}$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Luăm $n = 1$, $U = V = \mathbb{R}$ şi $f(x) = x^3$. Funcţia f este bijectivă şi indefinit derivabilă. Dar $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ şi f^{-1} nu este derivabilă în origine.

2. Dacă prin absurd ar exista un difeomorfism $f : U \to V$, atunci $\forall\, a \in A$, aplicaţia liniară $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ar fi un izomorfism deci $m = n$; absurd.

3. Pentru a calcula $y'(x)$ nu derivăm $y(x)$, pentru că nu este explicitat, dar derivăm relaţia iniţială care defineşte $y(x)$. Deci $y' - a\cos y\, y' = 1$ şi $y' = \dfrac{1}{1 - a\cos y}$. Apoi $y'' + a\sin y\, y'^2 - a\cos y\, y'' = 0$ şi se determină y''.

4. Derivăm relaţia din enunţ în raport cu x şi apoi cu y:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u)\cdot\left(a + c\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u)\cdot\left(b + c\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

unde $u = ax + by + cz$. Rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a\varphi'(u) - 2x}{2z - c\varphi'(u)},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b\varphi'(u) - 2y}{2z - c\varphi'(u)} \text{ etc.}$$

5. Se notează $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - a$ deci $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1. Atunci $H = F^{-1}(0)$ şi $\mathrm{d}F(u) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ are rang maxim pentru orice $u \in H$.

6. Presupunem că $M = \{xy = 0\}$, adică reuniunea axelor Ox, Oy, ar fi o varietate, de dimensiune 1. Atunci originea ar avea o vecinătate U astfel încît $U \cap M$ să fie difeomorfă şi în particular omeomorfă cu un interval deschis I din $\mathbb{R}$. Dar eliminînd cîte un punct din $U \cap M$ şi respectiv I, se obţin mulţimi cu patru şi respectiv două componente conexe şi acestea nu pot fi omeomorfe.

7. Se aplică direct definiţia.

8. Trebuie deci aflat maximul expresiei $x^2 + y^2$ cu legătura $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$. Fie $F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 1)$ şi se rezolvă sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0\ ,\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0,$$

obţinîndu-se punctele critice, din care se selecţionează cele de maxim.

9. a) $F = xyz + \lambda(x + y + z - 1)$; $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0\ ,\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0\ ,\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0\ ,\ x + y + z - 1.$

b) $F = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda(2x + 2y + z - 1)$ etc.

10. a) Funcţia f are originea ca unic punct critic şi nu este punct interior lui K. Marginile lui f vor fi atinse pe $\mathrm{Fr}K$, alcătuită din $A = \{(x,0) \mid x \in [-1,1]\}$, $B = \{(x,x^2) \mid x \in [-1,1]\}$, $C = \{(-1,y) \mid y \in [0,1]\}$ şi $D = \{(1,y) \mid y \in [0,1]\}$. Se determină maximele şi minimele restricţiilor lui f la mulţimile A, B, C, D; $\sup_K f$ este cel mai mare dintre ele etc.

Partea a II-a

CALCUL INTEGRAL

LECŢIA A VIII-A

INTEGRALA RIEMANN

INTRODUCERE

În redactarea acestei lecţii am presupus, ca şi pînă acum că, oarecum, cititorul este familiarizat cu principalele proprietăţi ale integralei Riemann, cu aplicaţiile acesteia şi cu calculul de primitive (subiecte tratate în liceu). De aici a rezultat o prezentare succintă a noţiunilor fundamentale şi lăsarea la o parte a calculului de primitive. Sunt prezentate de asemenea cîteva **generalizări** naturale (**integrale improprii, integrala Riemann - Stieltjes**). Anumite procedee de **calcul aproximativ** al integralelor Riemann au fost deja indicate în capitolele anterioare.

1. Definiţia şi proprietăţile integralei Riemann

Fie $[a, b]$, $a < b$, un interval compact în $\mathbb{R}$. O **diviziune** a intervalului $[a, b]$ este o mulţime (finită) $\nu = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Dacă ν, ν' sunt diviziuni ale intervalului $[a, b]$ şi $\nu' \supset \nu$ spunem că ν' este **mai fină** decît ν.
Dacă ν, ν' sunt diviziuni ale intervalului $[a, b]$ diviziunea $\nu \cup \nu'$ (reuniunea) este mai fină decît ν şi ν'.
În cele ce urmează, fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie **mărginită**. Dacă ν este o diviziune $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ notăm

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),\ m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),\ i = 1, \ldots, n.$$

Definim **sumele Darboux** (pentru f şi ν) astfel

$$S(\nu, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,\quad s(\nu, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Punem prin definiţie:

$$\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \inf_{\nu} S(\nu, f),\quad \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \sup_{\nu} s(\nu, f)$$

(inf şi sup după **toate** diviziunile intervalului $[a,b]$).

Să observăm că $\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$, $\underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$ sunt **numere** reale (nu $+\infty$ sau $-\infty$) deoarece f este mărginită.

Definiția VIII. 1. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ca mai sus.

1. Dacă $\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$ spunem că f este **integrabilă Riemann** pe $[a,b]$ și scriem $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ (sau $f \in \mathfrak{R}$ cînd nu este pericol de confuzie).

2. Dacă $f \in \mathfrak{R}$ notăm $\int_a^b f\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$ și numim **numărul** $\int_a^b f\mathrm{d}x$ **integrala** lui f pe $[a,b]$. (Se vor folosi și notațiile $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sau $\int_a^b f$ pentru $\int_a^b f\mathrm{d}x$).

Comentariu. Definiția de mai sus este bazată pe "intuiția" calculului ariei subgraficului unei funcții continue pozitive ca aproximare cu reuniuni de dreptunghiuri (vezi figura).

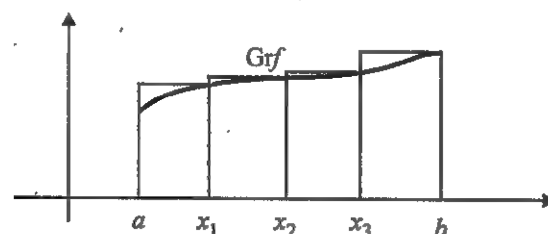


Fig. VIII. 1.

Urmărim stabilirea unor **criterii de integrabilitate** și o **caracterizare** a funcțiilor integrabile Riemann, legată de continuitatea acestora.

LEMA. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și ν, ν' diviziuni, ν' mai fină decît ν. Atunci $s(\nu',f) \geq s(\nu,f)$, $S(\nu',f) \leq S(\nu,f)$.

DEMONSTRAȚIE. Este suficient să considerăm cazul în care ν' are un singur punct în plus față de ν, de exemplu $x_{i-1} < y < x_i$ (i fixat). Să notăm pentru moment

$$m_1^* = \inf_{x \in [x_{i-1}, y]} f(x), \quad m_2^* = \inf_{x \in [y, x_i]} f(x).$$

Este clar că $m_i \leq m_1^*$, $m_i \leq m_2^*$ ($m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$). Avem de exemplu

$$s(\nu',f) - s(\nu,f) = m_1^*(y - x_{i-1}) + m_2^*(x_i - y) - m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Cealaltă inegalitate se demonstrează analog.

COROLAR. 1. Pentru orice două diviziuni ν_1, ν_2 avem $s(\nu_1,f) \leq S(\nu_2,f)$;

2. $\underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$.

DEMONSTRAȚIE. 1. Punem $\nu^* = \nu_1 \cup \nu_2$ și folosind lema, avem $s(\nu_1,f) \leq s(\nu^*,f) \leq S(\nu^*,f) \leq S(\nu_2,f)$ (inegalitatea din mijloc este evidentă).
2. Rezultă imediat din 1.

TEOREMA VIII. 1. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ dacă și numai dacă $(\forall)\varepsilon > 0$ există o diviziune ν astfel încît: $S(\nu,f) - s(\nu,f) < \varepsilon$.

DEMONSTRAȚIE. Să observăm că pentru orice diviziune ν avem

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x \leq S(\nu,f) - s(\nu,f),$$

de unde rezultă imediat implicația "$\Leftarrow$".
Pentru implicația "$\Rightarrow$" să fixăm $\forall \varepsilon > 0$; există diviziuni ν_1, ν_2 astfel încît

$$\int_a^b f\mathrm{d}x - s(\nu_1,f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(\nu_2,f) - \int_a^b f\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luăm $\nu = \nu_1 \cup \nu_2$ și folosind lema precedentă, deducem $S(\nu,f) - s(\nu,f) < \varepsilon$.

Comentariu. Pentru o diviziune ν avem

$$S(\nu,f) - s(\nu,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i.$$

În spiritul criteriului de mai sus încercăm să facem această diferență "mică", studiind "contribuția" diferențelor $M_i - m_i$ și pe de altă parte "contribuția" Δx_i. Primul tip de diferențe ne conduce spre continuitatea funcțiilor și (după cum vom vedea) al doilea tip ne conduce la noțiunea de mulțime de măsură 0. Aceste vagi comentarii intuitive pot ajuta la înțelegerea a ceea ce urmează.

Înainte de a obține un foarte important criteriu de integrabilitate, sunt necesare unele scurte pregătiri. **Lungimea** unui interval $I \subset \mathbb{R}$, de extremități $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, este $l(I) = b - a$ (indiferent de tipul intervalului).

Definiția VIII. 2. O submulțime $M \subset \mathbb{R}$ are **măsura 0** (nulă) dacă $(\forall)\varepsilon > 0$, există un șir $(I_n)_n$ de intervale deschise astfel încît

$$M \subset \bigcup_n I_n \text{ și } \sum_n l(I_n) < \varepsilon .$$

EXEMPLUL 1. Dacă $A \subset B$ și B are măsura 0, atunci A are o măsura 0.

EXEMPLUL 2. Dacă $M \subset \mathbb{R}$ este finită sau numărabilă, M are măsura 0.

EXEMPLUL 3. Dacă $(M_k)_k$ este un șir de mulțimi de măsură 0, reuniunea $M = \bigcup_k M_k$ are măsură 0. În adevăr, dat $\varepsilon > 0$, $M_k \subset \bigcup_n I_{n,k}$ și

$$\sum_n l(I_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \quad k = 0,1,...$$

Pentru o "numerotare" $(I_p)_p$ a familiei numărabile $(I_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$, rezultă

$$M \subset \bigcup_p I_p \text{ și } \sum_p l(I_p) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon .$$

EXEMPLUL 4. Intervalul $[a,b]$, $a < b$, **nu** are măsura 0.
Pentru a demonstra acest lucru, se arată mai întîi prin inducție că dacă

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (a_k,b_k) \text{ rezultă } \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \geq b - a .$$

Apoi intervalul $[a,b]$ fiind **compact,** din orice acoperire a lui $[a,b]$ cu intervale deschise se poate extrage o acoperire **finită.** Este suficient să luăm $\varepsilon < b - a$ și nu vom putea obține acoperirea cerută în definiția mulțimii de măsură 0.

TEOREMA VIII. 2. (H. LEBESGUE, 1875 - 1941). Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție **mărginită** și M mulțimea punctelor sale de discontinuitate. Atunci f este integrabilă Riemann dacă și numai dacă M are măsura 0.

DEMONSTRAȚIE. Înainte de a începe demonstrația propriu-zisă, vom introduce noțiunea de **oscilație** a unei funcții într-un punct. Dacă $f : X \to \mathbb{R}$ este o funcție **mărginită** definită pe un spațiu metric X, $a \in X$ și $r > 0$ punem:

$$M(f,a,r) = \sup_{x \in B(a,r)} f(x), \quad m(f,a,r) = \inf_{x \in B(a,r)} f(x).$$

Definim **oscilația** funcției f în punctul a:

$$o(f,a) = \lim_{r \to 0} (M(f,a,r) - m(f,a,r))$$

($o(f,a)$ există, căci $M(f,a,r) - m(f,a,r)$ descrește).
Este ușor de demonstrat că
1) $(\forall)\varepsilon > 0$, mulțimea $\{a \in X \mid o(f,a) \geq \varepsilon\}$ este **închisă**.
2) f este continuă în a dacă și numai dacă $o(f,a) = 0$.

Revenind la demonstrația teoremei, să notăm

$$M = \{x \in [a,b];\ f \text{ este discontinuă în } x\}$$

și pentru $\varepsilon > 0$

$$M_\varepsilon = \{x \in [a,b];\ o(f,x) \geq \varepsilon\}.$$

Este clar că $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{1/k}$.

"$\Rightarrow$" Să presupunem că f este integrabilă Riemann. Vom arăta că $M_{1/k}$ are măsură 0 pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Va rezulta (exemplul 3) că M are măsură 0. Fixăm deci $k \geq 1$ și fie $\varepsilon > 0$. Există o diviziune ν: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ astfel încît

$$S(\nu,f) - s(\nu,f) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

(conform teoremei VIII. 1). Vom nota $A_i = [x_{i-1},x_i]$, $i = 1, ..., n$ și fie J mulțimea acelor indici i pentru care $A_i \cap M_{1/k} \neq \emptyset$. Fie $M'_{1/k}$ submulțimea acelor $x \in M_{1/k}$ pentru care există $i \in J$ cu $A_i \cap M_{1/k} \neq \emptyset$. Avem

$$\frac{1}{k}\sum_{i \in J} l(A_i) \leq \sum_{i \in J} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq S(\nu,f) - s(\nu,f) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

deci $\sum_{i \in J} l(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ și $(A_i)_{i \in J}$ acoperă $M'_{1/k}$. Cum $M_{1/k}$ diferă de $M'_{1/k}$ printr-o mulțime finită, este clar că putem obține o acoperire (numărabilă) a lui $M_{1/k}$ cu intervale deschise cu suma lungimilor $< \varepsilon$. În definitiv, $M_{1/k}$ are măsură 0 $\forall\ k \geq 1$ și deci M are măsură 0.

"$\Leftarrow$" Să presupunem că M are măsură 0 și fie $\varepsilon > 0$. M_ε este compactă și de măsură 0 ($M_\varepsilon \subset M$). Există deci o mulțime finită de intervale **închise** $I_1, ..., I_k$ a căror interioare acoperă M_ε și $\sum_{j=1}^{k} l(I_j) < \varepsilon$. Putem considera o diviziune ν a intervalului $[a,b]$ astfel încît intervalele corespunzătoare acestei diviziuni să fie de unul din următoarele tipuri:
(I) intervale A cu $A \subset I_j$ pentru un $j \in \{1, ..., k\}$;
(II) intervale B cu $B \cap M_\varepsilon = \emptyset$.
Fie $|f(x)| \leq K\ \forall\ x \in [a,b]$ (f este mărginită). Avem
$S(\nu,f) - s(\nu,f) = \sum (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{I} + \sum_{II}$ unde în $\sum_{I}$ sunt intervale de tip I iar în $\sum_{II}$ de tip II. Avem $\sum_{I} \leq 2K \sum_{j=1} l(I_j) < 2K\varepsilon$. Se poate demonstra cu ușurință că trecînd eventual la o diviziune **mai fină,** adăugînd puncte numai pentru

intervalele de tip II, suma $\sum_{II}$ poate fi făcută mai mică decît $\varepsilon(b-a)$. În acest mod teorema lui Lebesgue este demonstrată.

OBSERVAȚIE. Spunem despre o proprietate adevărată pentru toate punctele, cu excepția unei mulțimi de măsură 0, că are loc **aproape peste tot** (a.p.t). Teorema de mai sus poate fi enunțată "mai plastic" astfel: O funcție mărginită pe un interval compact este integrabilă Riemann dacă și numai dacă este **continuă aproape peste tot**. În fond integrala Riemann este adaptată funcțiilor "aproape continue", dacă ne putem exprima în acest fel.

COROLAR. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este **continuă**, atunci f este integrabilă Riemann.

În adevăr, mulțimea vidă are evident măsură 0.

COROLAR. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este **monotonă**, atunci f este integrabilă Riemann.

În adevăr, mulțimea punctelor de discontinuitate pentru o funcție monotonă este finită sau numărabilă, deci de măsura 0. (Fie f crescătoare; f are limite laterale finite în orice punct, suma diferențelor acestora (saltul funcției) nu depășește $f(b)-f(a)$. Rezultă că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ mulțimea punctelor în care saltul funcției este $\geq \frac{1}{n}$ este finită. De aici rezultă imediat că mulțimea punctelor de discontinuitate pentru f este finită sau numărabilă).

EXEMPLU. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}\\ 1, & \text{în rest}\end{cases}$ nu este integrabilă Riemann căci este discontinuă în orice punct, iar măsura intervalului $[a,b]$ $(a<b)$ **nu** este nulă.

TEOREMA VIII. 3. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann, $f([a,b])\subset[c,d]$ și $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

DEMONSTRAȚIE. Dacă f este continuă în x_0, cum g este continuă în $f(x_0)$, rezultă că $g\circ f$ continuă în x_0. Deci mulțimea discontinuităților lui $g\circ f$ este conținută în cea a lui f și aplicăm teorema VIII. 2.

TEOREMA VIII. 4. Dacă $f,g\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ și $\alpha\in\mathbb{R}$, atunci

1) $f+g\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ și $\int_a^b(f+g)dx=\int_a^b f dx+\int_a^b g dx$

2) $\alpha f\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ și $\int_a^b(\alpha f)dx=\alpha\int_a^b f dx$

3) $fg\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$.

DEMONSTRAȚIE. Afirmațiile "calitative" $f+g\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$, $fg\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ rezultă imediat din teorema VIII. 2 (dacă f și g sunt continue în x_0, $f+g$, fg sunt continue în x_0 și apoi reuniunea a două mulțimi de măsură 0 este de măsură 0 etc.).

Pentru a demonstra de pildă că $\int_a^b(f+g)dx=\int_a^b f dx+\int_a^b g dx$, observăm că pentru orice diviziune ν avem

$$s(\nu,f)+s(\nu,g)\leq s(\nu,f+g)\leq S(\nu,f+g)\leq S(\nu,f)+S(\nu,g) \text{ etc.}$$

TEOREMA VIII. 5.

1) Dacă $f,g\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ și $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f dx\leq\int_a^b g dx$.

2) Dacă $f\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$, atunci $|f|\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ și $\left|\int_a^b f dx\right|\leq\int_a^b|f|dx$.

DEMONSTRAȚIE.
1) Rezultă imediat din definiții.
2) $|f|\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ de exemplu folosind teorema VIII. 3 ($g(x)=|x|$). Mai departe să alegem $c=\pm1$ astfel încît $c\int_a^b f dx\geq 0$. Deducem

$$\left|\int_a^b f dx\right|=c\int_a^b f dx=\int_a^b(cf)dx\leq\int_a^b|f|dx$$

căci evident $cf\leq|f|$ și folosim primul punct.

COROLAR. 1) Dacă $f\in\mathfrak{R}_{[a,b]}$ și $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[a,b]$ $(m,M\in\mathbb{R})$, atunci

$$m(b-a)\leq\int_a^b f dx\leq M(b-a).$$

2) Dacă f este **continuă** pe $[a,b]$, atunci există $c\in[a,b]$ astfel încît

$$\int_a^b f dx=f(c)(b-a).$$

DEMONSTRAŢIE. 1) rezultă imediat din teorema precedentă iar 2) folosind proprietatea Darboux a funcţiilor continue şi observînd că

$$m_f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx \le M_f \text{ unde } m_f = \inf_{[a,b]} f(x),\quad M_f = \sup_{[a,b]} f(x).$$

TEOREMA VIII. 6. 1) Dacă $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$, atunci $f \in \mathfrak{R}_{[c,d]}$ pentru orice interval $[c,d] \subset [a,b]$;
2) Fie $a < c < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in \mathfrak{R}_{[a,c]}$ şi $f \in \mathfrak{R}_{[c,b]}$, atunci $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ şi

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx \text{ (aditivitatea integralei ca funcţie de interval).}$$

DEMONSTRAŢIE. Totul rezultă imediat din teorema VIII. 2, cu excepţia egalităţii $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$. Pentru a demonstra această egalitate, se observă că dacă ν' este o diviziune a lui $[a,c]$ şi ν'' o diviziune a lui $[c,b]$, atunci $\nu = \nu' \cup \nu''$ (într-un sens clar) este o diviziune a lui $[a,b]$ şi

$$s(\nu,f) = s(\nu',f) + s(\nu'',f),\ S(\nu,f) = S(\nu',f) + S(\nu'',f) \text{ etc.}$$

OBSERVAŢIE. Se face **convenţia** că dacă $a > b$, atunci $\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$ (dacă aceasta din urmă există). De asemenea se pune $\int_a^a f\,dx = 0$. Cu aceste convenţii formula $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$ se extinde oricare ar fi poziţia punctelor a,b,c (cu condiţia existenţei integralelor). Rezultatul următor este o extindere a teoremei IV. 6.

TEOREMA VIII. 7. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii, $f_n \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ $\forall n$, astfel încît $f_n \xrightarrow{UC} f$ pe $[a,b]$. Atunci $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ şi $\int_a^b f_n\,dx \to \int_a^b f\,dx$ (integrare termen cu termen).

DEMONSTRAŢIE. Dacă M_n este mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei f_n atunci rezultă că mulţimea M a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f satisface condiţia $M \subset \bigcup_n M_n$ (căci convergenţa uniformă păstrează continuitatea). Dar M_n are măsură 0 pentru orice n deci $\bigcup_n M_n$ are măsura 0 şi deci M. Cît despre integrarea termen cu termen demonstraţia este identică cu cea din cazul funcţiilor continue (teorema IV. 6).

Înainte de a trece la proprietăţile de "calcul" ale integralei Riemann, vom considera aşa numitele sume Riemann. Dată o diviziune ν a intervalului $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, se defineşte **norma** diviziunii ν ca $\mu(\nu) = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$.

TEOREMA VIII. 8. Fie $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune ν cu $\mu(\nu) < \delta_\varepsilon$, să rezulte

$$S(\nu,f) - s(\nu,f) < \varepsilon.$$

DEMONSTRAŢIE. Să observăm că afirmaţia teoremei nu este absolut evidentă, căci deşi ştim că diferenţa $S(\nu,f) - s(\nu,f)$ scade prin trecere la diviziuni mai fine, totuşi condiţia de normă "mică" nu implică neapărat rafinarea diviziunilor. Vom schiţa ideile demonstraţiei. Fie $K = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dat $\varepsilon > 0$ există o diviziune ν_0 astfel încît $S(\nu_0,f) - s(\nu_0,f) < \varepsilon$. Se poate arăta că dacă N_0 este numărul de puncte în ν_0 şi δ_0 lungimea celui mai mic interval al diviziunii ν_0, avem $S(\nu,f) - s(\nu,f) < \varepsilon + 4KN_0\delta$ pentru orice $\delta < \delta_0$ şi orice diviziune ν cu $\mu(\nu) < \delta$. Cum δ poate fi luat oricît de mic, afirmaţia rezultă. Nu intrăm în detalii.

Dată fiind o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ν o diviziune a intervalului $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ şi pentru fiecare $i = 1,\ldots,n$, $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, se consideră **suma Riemann**

$$S(\nu,f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(ξ_i numite puncte "intermediare" pentru ν).

TEOREMA VIII. 9. Fie $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune ν cu $\mu(\nu) < \delta_\varepsilon$ să rezulte

$$\left|S(\nu,f,\xi) - \int_a^b f\,dx\right| < \varepsilon,$$

pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i.

DEMONSTRAŢIE. Este clar că pentru orice diviziune ν şi orice alegere a punctelor intermediare $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ avem $s(\nu,f) \le S(\nu,f,\xi) \le S(\nu,f)$. Folosind teorema precedentă obţinem imediat rezultatul (clar $s(\nu,f) \le \int_a^b f\,dx \le S(\nu,f)$ etc.).

Teorema VIII. 9 admite şi următoarea reciprocă:

TEOREMA VIII. 10. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită şi I un număr real astfel încît $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune ν cu $\mu(\nu) < \delta_\varepsilon$ să avem $|S(\nu,f,\xi) - I| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i. Atunci $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ şi $I = \int_a^b f\mathrm{d}x$.

Demonstraţia este simplă şi o lăsăm ca exerciţiu.

2. Calculul integralelor Riemann

TEOREMA VIII. 11. (teorema fundamentală). Fie $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ şi $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a,b]$. Rezultă:

1) F este continuă pe $[a,b]$.
2) $F'(x) = f(x)$ aproape peste tot (mai precis F este derivabilă a.p.t. şi $F' = f$ a.p.t.).

DEMONSTRAŢIE. 1) Dacă $|f(x)| \le K$ pe $[a,b]$ avem pentru orice $x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int_{x_2}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x\right| \le K|x_1 - x_2|$$

şi continuitatea funcţiei F rezultă.
2) Vom arăta mai precis că dacă $x_0 \in [a,b]$ şi f este continuă în x_0, atunci F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$. Avem

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\mathrm{d}x.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există $\delta > 0$ astfel încît $x \in [a,b]$, $|x - x_0| \le \delta$ să implice $-\varepsilon \le f(x) - f(x_0) \le \varepsilon$, de unde

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \le \int_{x_0}^{x} f\mathrm{d}x \le (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0) \text{ pentru } |x - x_0| \le \delta,\ x > x_0.$$

Deci $-\varepsilon \le \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \le \varepsilon$ pentru $|x - x_0| \le \delta$, $x \ge x_0$.

Cazul $x < x_0$ se tratează similar. În definitiv, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $x \in [a,b]$ implică

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \le \varepsilon,$$

ceea ce arată că $F'(x_0) = f(x_0)$.

TEOREMA VIII. 12. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită şi continuă cu excepţia eventual a unui număr finit de puncte. Dacă $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $G'(x) = f(x)$ cu excepţia eventual a unui număr finit de puncte, atunci

$$\int_a^b f\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = G\big|_a^b \text{ (notaţie).}$$

DEMONSTRAŢIE. f rezultă integrabilă pe $[a,b]$. Funcţia $F(x) = \int_a^x f$ este continuă şi $F'(x) = f(x)$ cu excepţia unui număr finit de puncte. Deducem că $F'(x) = G'(x)$ cu excepţia unui număr finit de puncte. Obţinem (folosind continuitatea funcţiilor F şi G) că $F - G$ este **constantă** pe $[a,b]$. Deci

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f\mathrm{d}x.$$

OBSERVAŢIE. Teorema VIII. 12 prezintă o situaţie mai restrictivă decît cea naturală (continuitatea a.p.t.) Rezultate mai generale se pot obţine în cadrul integralei Lebesgue.

TEOREMA VIII. 13. (integrare prin părţi). Fie $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue şi derivabile cu derivate f', g', mărginite şi continue cu excepţia eventual a unui număr finit de puncte. Atunci

$$\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x + \int_a^b fg'\mathrm{d}x = fg\big|_a^b.$$

TEOREMA VIII. 14. (schimbare de variabilă). Fie $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ derivabilă, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Fie f continuă pe $\varphi[\alpha,\beta]$. Presupunem că $(f\circ\varphi)\varphi'$ este continuă cu excepţia eventual a unui număr finit de puncte. Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Demonstraţia teoremelor VIII. 13, VIII. 14 este imediată şi de altfel cunoscută din liceu.

3. Integrale improprii

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nevid. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se zice **local integrabilă** dacă restricţia sa la orice interval compact conţinut în I este integrabilă Riemann.

EXEMPLU. Orice funcţie continuă a.p.t este local integrabilă.

Fie $[a,b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ (deci b poate fi şi $+\infty$) şi $f : [a,b) \subset \mathbb{R}$ **local**

integrabilă. Este deci bine definită funcţia $F : [a,b) \subset \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f\,dt.$$

Definiţia VIII. 3. 1) Perechea f,F mai sus considerată se numeşte **integrala improprie** a funcţiei f pe $[a,b)$ şi se notează $\int_a^b f$ (sau $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f\,dt$).

2) Dacă $\lim\limits_{x \to b} F(x)$ **există şi este finită,** atunci integrala improprie $\int_a^b f$ se zice **convergentă** (C) şi se notează de asemenea $\lim\limits_{x \to b} F(x) = \int_a^b f$ (valoarea integralei improprii).

3) O integrală improprie care **nu** este convergentă se zice **divergentă** (D).

EXEMPLUL 1. $[a,b) = [0,\infty)$, $f(t) = e^{-t}$, $t \in [0,\infty)$. Avem

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}\ ,\quad x \in [0,\infty),$$

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ deci $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$ este **convergentă** şi $\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$.

EXEMPLUL 2. $[a,b) = [0,\infty)$, $f(t) = \sin t$, $t \in [0,\infty)$. Avem

$$F(x) = \int_0^x \sin t\,dt = 1 - \cos x,\quad x \in [0,\infty).$$

Limita $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ **nu** există deci $\int_0^\infty \sin t\,dt$ este **divergentă.**

EXEMPLUL 3. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$ (după cum rezultă dintr-un calcul evident).
Este clar cum se defineşte integrala improprie şi convergenţa acesteia pe un interval $(a,b]$ cu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (pentru $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ local integrabilă se ia $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ şi se consideră $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ etc.)

EXEMPLUL 4. $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ este C dacă şi numai dacă $\alpha < 1$.

Fie acum $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă. Pentru orice $x,y \in (a,b)$ este bine definită

$$F(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Perechea f,F este **integrala improprie a lui** f pe (a,b) notată $\int_a^b f$ $\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$. $\int_a^b f$ se zice **convergentă** dacă există şi este finită $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} F(x,y)$.

În acest caz, valoarea acestei limite este valoarea integralei improprii $\int_a^b f$.

Integrala improprie se zice **divergentă** dacă **nu** este convergentă.

Se poate arăta uşor că $\int_a^b f$ este C dacă şi numai dacă există $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, astfel încît integralele $\int_a^c f$ şi $\int_c^b f$ să fie C. În acest caz

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

EXEMPLUL 5. $(a,b) = (-\infty,+\infty)$, $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ este C şi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$ aşa cum rezultă imediat observînd paritatea funcţiei f şi faptul că $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

OBSERVAŢIE. Fie $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ local integrabilă. Spunem că $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ este **convergentă** în sensul **valorii principale** (Cauchy) dacă **există** şi este **finită** $\lim\limits_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f$ (egalitatea este de fapt o notaţie).

Este clar că dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ este convergentă atunci este convergentă în sensul

valorii principale şi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f$.

Pe de altă parte $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$ este convergentă în sensul valorii principale şi

$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt = 0$ dar $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$ nu este convergentă aşa cum rezultă dintr-un exemplu anterior.

Se pot considera integrale în sensul valorii principale şi în alte situaţii dar nu vom intra îm amănunte.

Comentariu. Aşa cum se poate remarca, definiţiile integralelor improprii şi a convergenţei sunt asemănătoare cu definiţii corespunzătoare din teoria seriilor. O analogie se stabileşte imediat pe linia:

$$u_n \leftrightarrow f(t) \quad S_n = u_0 + ... + u_n \leftrightarrow F(x) = \int\limits_a^x f \text{ etc.}$$

Nu este deci o surpriză că teoria integralelor improprii se dezvoltă pe aceleaşi linii ca teoria seriilor (criterii de convergenţă etc.) Este deci **util** ca această analogie să fie intuită şi folosită **dar** trebuie remarcat că există şi "neconoordanţe". Astfel:

EXEMPLU. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ cu $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n + \frac{1}{2n^3}) = f(n - \frac{1}{2n^3}) = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi avînd graficul ca în figură; f este continuă deci local integrabilă, aria unui triunghi centrat în n este $\frac{1}{2n^2}$ şi seria $\sum \frac{1}{2n^2}$ este convergentă deci este imediat de văzut că $\int\limits_0^\infty f$ este **convergentă** dar evident $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ **nu este 0**:

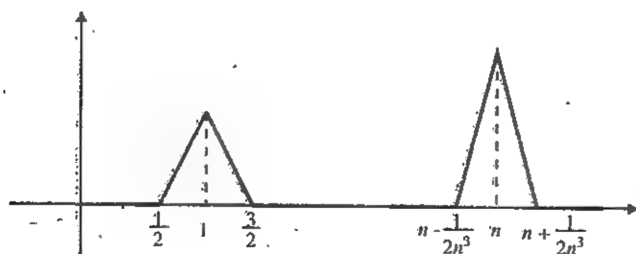


Fig. VIII. 2

În definitiv dacă pentru convergenţa unei serii numerice $\sum u_n$ este necesar ca $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, o integrală $\int\limits_a^\infty f$ poate fi convergentă fără ca $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ să fie 0.

Vom prezenta în continuare cîteva criterii de convergenţă pentru integrale improprii. Ne vom limita la cazul $[a,b)$, celelalte cazuri tratîndu-se analog.

Criteriul integral. Fie $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ pozitivă şi monoton descrescătoare. Atunci $\int\limits_1^\infty f$ este convergentă dacă şi numai dacă $\sum\limits_{n\ge 1}^{\infty} f(n)$ este convergentă. Aceasta este teorema II. 6, dar citită invers.

Criteriul general de convergenţă (Cauchy). Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă. Atunci $\int\limits_a^b f$ este convergentă dacă şi numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a,b) \text{ astfel încît } \forall x,y \in [a,b) \; x,y > b_\varepsilon, \text{ să rezulte } \left|\int\limits_x^y f\right| < \varepsilon .$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $F(x) = \int\limits_a^x f$; totul revine la a arăta că $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$ există şi este finită dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon \in [a,b)$ astfel încît $\forall x,y \in [a,b)$ $x,y > b_\varepsilon$ să rezulte $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$.
Avem aici un criteriu Cauchy pentru limite de funcţii. Implicaţia "$\Rightarrow$" este banală. Demonstrăm implicaţia "$\Leftarrow$".
Fie $(x_n)_n$ un şir în $[a,b)$, $x_n \to b$. Folosind condiţia din enunţ rezultă că şirul $(F(x_n))_n$ este un şir Cauchy în $\mathbb{R}$. Deducem că $(F(x_n))_n$ este **convergent**. Pentru a termina să arătăm că dacă $x_n \to b$, $y_n \to b$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) \text{ (limita nu depinde de şirul } (x_n)_n).$$

Dar este suficient să considerăm şirul $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$ care evident are limita b iar şirurile $(F(x_n))_n$, $(F(y_n))_n$ sunt subşiruri ale şirului convergent $F(x_1), F(y_1), F(x_2), F(y_2), ..., F(x_n), F(y_n)...$

Definiţia VIII. 4. Dacă $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ este local integrabilă spunem că $\int\limits_a^b f$ este **absolut convergentă** (AC) dacă $\int\limits_a^b |f|$ este convergentă (se mai zice că f este **absolut integrabilă** pe $[a,b)$).

Din criteriul general de convergență de mai sus rezultă imediat că dacă $\int_a^b f$ este absolut convergentă atunci este și convergentă.

Criteriul de comparație. Fie $f,g : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă, $g \geq 0$ și $|f| \leq g$. Dacă $\int_a^b g$ este convergentă, atunci $\int_a^b f$ este absolut convergentă.

DEMONSTRAȚIE. $\forall x,y \in [a,b)$, $x \leq y$, $\int_x^y |f| \leq \int_x^y g$ și aplicăm criteriul general de convergență.

OBSERVAȚIE. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă. Atunci este clar că $\int_a^b f$ este convergentă dacă și numai dacă există $c \in [a,b)$ astfel încît $\int_c^b f$ să fie convergentă. De aceea este suficient în criteriile de convergență ca anumite condiții să aibă loc pentru intervale de tip $[c,b)$ cu c suficient de aproape de b.

EXEMPLU. $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ este convergentă căci pentru $t \geq 1$ avem $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ și $\int_1^\infty e^{-t} dt$ este convergentă (deși simplu, acest exemplu arată utilitatea criteriului comparației căci pentru e^{-t^2} nu putem "calcula" vreo primitivă).

Criteriul de convergență la limită. Fie $f,g : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabile și $g > 0$ pe $[a,b)$ astfel încît

$$\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = l \in \mathbb{R}.$$

1) Dacă $\int_a^b g$ converge atunci $\int_a^b f$ converge absolut.

2) Dacă $l \neq 0$ $\int_a^b g$ converge dacă și numai dacă $\int_a^b f$ converge (cele două integrale au **aceeași natură**).

DEMONSTRAȚIE. 1) $\lim\limits_{t \to b} \frac{|f(t)|}{g(t)} = |l|$ și deci există $c \in [a,b)$ astfel încît pentru

$$t \in [c,b) \ |f(t)| \leq (1 + |l|)g(t)$$

și aplicăm prima formă a criteriului comparației.

2) Din $l \neq 0$ deducem că funcția f are semn constant în vecinătatea lui b și

$$\lim_{t \to b} \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{1}{l}.$$

Putem presupune $f > 0$ și aplicăm 1).

EXEMPLU. Fie f local integrabilă pe $[a,+\infty)$ astfel încît

$$\lim_{t \to \infty} t^\alpha f(t) = l \in \mathbb{R}.$$

1) Dacă $\alpha > 1$, atunci $\int_a^\infty f$ este absolut convergentă.

2) Dacă $\alpha \leq 1$ și $l \neq 0$, atunci $\int_a^\infty f$ este divergentă. În adevăr, se ia $g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ în criteriul de mai sus.

Așa cum am precizat, criteriul de convergență se adaptează imediat la cazul intervalului $(a,b]$. Fără a mai intra în detalii, dăm următorul exemplu util în aplicații.

EXEMPLU. f local integrabilă pe $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\lim_{t \to a} (t-a)^\alpha f(t) = l \in \mathbb{R}.$$

1) Dacă $\alpha < 1$, atunci $\int_a^b f$ este absolut convergentă.

2) Dacă $\alpha \geq 1$ și $l \neq 0$, $\int_a^b f$ este divergentă.

În adevăr se compară cu $g(t) = \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ etc.

Criteriul lui Abel. Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$ și $\int_a^\infty f'$ absolut convergentă. Fie $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă astfel încît funcția $G(x) = \int_a^x g$ să fie mărginită pe $[a,\infty)$. Atunci $\int_a^\infty fg$ este convergentă.

DEMONSTRAȚIE. Fie $M > 0$ astfel încît $|G(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,\infty)$; avem

$$\int_a^x fg = fG\Big|_a^x - \int_a^x f'G \ , \quad \forall x \in [a,\infty); \text{ dar } |f'G| \le M|f'|$$

deci membrul drept are limită finită spre ∞ din ipoteze ($fG \to 0$ etc.) Deci $\int_a^\infty fg$ este convergentă.

EXEMPLU. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ este convergentă. În adevăr este suficient să arătăm că $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ este convergentă. Luăm $f(t) = \frac{1}{t}$ şi $g(t) = \sin t$ şi aplicăm criteriul lui Abel.

OBSERVAŢIE. $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ **nu** este absolut convergentă. În adevăr dacă ar fi, am deduce din $\frac{1-\cos 2t}{2} = \sin^2 t \le |\sin t|$, că $\int_1^\infty \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt$ este C. Dar $\int_1^\infty \frac{\cos 2t}{t}\,dt$ este C (Abel) în timp ce $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ este D şi am ajuns la o contradicţie. În definitiv $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ este C dar nu este AC.

4. Integrala Riemann - Stieltjes

Matematicianul olandez T. STIELTJES (1856-1894) a avut ideea extinderii integralei Riemann.

Fie $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie **monoton crescătoare**. Pentru o diviziune ν $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, vom nota $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $i = 1 \ldots n$.

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie **mărginită** vom pune

$$S(\nu,f,\alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x);$$

$$s(\nu,f,\alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Generalizînd situaţia descrisă în paragraful 1 punem

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_\nu S(\nu,f,\alpha), \quad \underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_\nu s(\nu,f,\alpha)$$

(inf şi sup după toate diviziunile ν).

Se spune că f este **integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu α pe** $[a,b)$ dacă $\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha$. Scriem $f \in \Re(\alpha)$ ($[a,b]$ este subînţeles).

În acest caz, notăm $\int_a^b f d\alpha$ valoarea comună.

O serie întreagă de rezultate considerate în paragraful 1 se extind la noua situaţie (cazul integralei Riemann este $\alpha(x) = x$). Astfel de exemplu:

TEOREMA VIII. 15. 1) Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci $f \in \Re(\alpha)$ pentru orice α crescătoare.
2) Dacă f este monotonă pe $[a,b]$ şi α este crescătoare şi continuă, atunci $f \in \Re(\alpha)$.
3) Dacă $f \in \Re$ şi α este crescătoare şi derivabilă cu $\alpha' \in \Re$ atunci $f \in \Re(\alpha)$ şi

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f\alpha' dx$$

(calculul integralei Riemann-Stieltjes cu ajutorul integralei Riemann).

Nu vom intra în detalii privind demonstraţia acestei teoreme. Aşa cum se observă din enunţ, cazul funcţiilor α crescătoare, dar nu neapărat continue, poate aduce fenomene noi faţă de situaţia întîlnită la integrala Riemann. Astfel, este o chestiune de oarecare subtilitate că definiţia prezentată mai sus nu este echivalentă cu cea cu sume Riemann-Stieltjes (de tipul $\sum_i f(\xi_i)\Delta\alpha_i$) în cazul în care α nu este continuă. Nu vom intra în amănunte.

5. 10 exerciţii

1. Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_1^{1+x} e^{\cos t} dt$.

2. a) Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots n}\cdot\frac{\pi}{2} & n \text{ par} \\ \frac{2\cdot4\cdot\ldots(n-1)}{3\cdot5\cdot\ldots n} & n \text{ impar} \end{cases}$

b) Folosind a) să se stabilească relaţia $\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{[2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n]^2}{[3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)]^2\cdot n}$ (numită formula lui J. WALLIS, 1616 – 1703).

3. Fie şirul $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $(a_n)_n$ este **descrescător** şi notînd $a = \lim a_n$, că $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$, $\forall n \geq 1$. Deci $\forall n\ \exists \theta_n \in (0,1)$ astfel ca $a_n = a e^{\frac{\theta_n}{12n}}$.

b) Folosind formula lui Wallis, să se arate că $a = \sqrt{2\pi}$.

c) Să se deducă formula lui D. STIRLING, (1692 – 1770):

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

4. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ iraţional sau } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{dacă } x = \frac{p}{q} \text{ (fracţie ireductibilă } p,q > 0) \end{cases}$$

Să se arate că f este continuă în orice punct iraţional. Să se deducă integrabilitatea lui f pe $[0,1]$.

5. Să se studieze convergenţa sau divergenţa următoarelor integrale improprii:

$$\text{a) } \int_0^1 \ln t\,dt;\ \text{b) } \int_0^\infty x e^x dx;\ \text{c) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)};\ \text{d) } \int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$$

6. Să se calculeze $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)dx$; $|r| \neq 1$ (numită integrala lui S. D. POISSON, 1781 – 1840).

7. Să se calculeze v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$ şi v.p. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{|x-4|}}$.

8. a) Fie P,Q polinoame cu coeficienţi reali prime între ele. Să se arate că $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ converge dacă şi numai dacă Q nu se anulează pe $\mathbb{R}$ şi grad $Q \geq$ grad $P + 2$.

b) Fie $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

i) Dacă $\beta > 1$ sau $\beta = 1$ şi $\alpha < -1$, atunci $\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha t}{t^\beta}dt$ converge.

ii) Dacă $\beta < 1$ sau $\beta = 1$ şi $\alpha \geq -1$, atunci $\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha t}{t^\beta}dt$ diverge.

9. a) Să se studieze convergenţa integralelor: $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$.

b) Fie $f(x) = 3x\cos x^3 - \frac{1}{x^2}\sin x^3$, $x \geq 1$. Să se arate că $\int_1^\infty f$ este C dar $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

10. Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$, unde $c \in (a,b)$. Să se arate că $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ şi $\int_a^b f = 0$. Să se deducă de aici că modificarea unei funcţii integrabile Riemann într-un număr finit de puncte nu afectează nici integrabilitatea, nici valoarea integralei.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Fie $F(x) = \int_1^{1+x} e^{\cos t}dt$. Avem de calculat: $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0) = e^{\cos 1}$.

2. a) Fie $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$. Avem $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Pentru $n \geq 2$ integrînd prin părţi rezultă:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x(-\cos x)'dx = -\sin^{n-1}x\cos x|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\cos^2 x dx.$$

Deducem relaţia de recurenţă $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n \geq 2$.

Folosind I_0, I_1 se obţine rezultatul cerut.

b) Avem $\sin^{2n+1}x \leq \sin^{2n}x \leq \sin^{2n-1}x$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $n \geq 1$ integrînd pe $[0,\frac{\pi}{2}]$ şi folosind formula de la punctul a) se obţine cu un raţionament simplu de şiruri formula lui Wallis.

3. a) În dezvoltarea $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x(1 + \frac{1}{3}x^2 + \ldots + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + \ldots)$, $|x| < 1$ facem

$x = \frac{1}{2n+1}$, $n \geq 1$ şi obţinem $\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + ...)$ sau

$$(n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + ... \text{ rezultă}$$

$$1 < (n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + ...\right] \text{ deci}$$

$$1 < (n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \text{ obţinem}$$

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \text{ deci } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} \text{ şi } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a .$$

b) Pornim de la

(*) $$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1$$

şi de la formula lui Wallis

(**) $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n+1)}\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right]$$

Înlocuind în (**) $n!$ şi $(2n)!$ din (*) se obţine cu un scurt raţionament $a = \sqrt{2\pi}$ şi apoi formula lui Stirling.

4. Fie $\xi \in [0,1]$ un număr iraţional. Pentru orice natural $n \geq 1$ există un natural l astfel încît $\frac{l}{n} < \xi < \frac{l+1}{n}$. Există deci un interval deschis $I_n \subset [0,1]$ ce conţine ξ şi astfel încît pentru orice raţional $x \in I_n$ $f(x) \neq \frac{1}{n}$. Fie $\varepsilon > 0$. Există $N \in \mathbf{N}$ astfel încît $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Folosind observaţia de mai sus putem găsi un interval $I \subset [0,1]$, $\xi \in I$ şi $f(x) < \frac{1}{N}$ pentru orice $x \in I$ etc.

5. a) convergentă, b) divergentă, c) convergentă, d) convergentă. De exemplu pentru a) $\int_x^1 \ln t dt = -1 - x\ln x + x \underset{x\to 0}{\to} -1$. Pentru c), se poate pune $\sqrt{x} = t$.

6. Considerăm suma Riemann

$$S_n = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln(1 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + r^2) = \frac{\pi}{2}\ln\left[(1+r)^2\prod_{k=1}^{n-1}(1 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + r^2)\right].$$

Considerînd descompunerea în factori a polinomului $z^{2n} - 1$ peste $\mathbf{C}$ rezultă

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1)\prod_{i=1}^{n-1}(1 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + z^2) \ \forall z \in \mathbf{C}$$

Înlocuind $z = r$ deducem

$$S_n = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}(r^{2n} - 1)\right).$$

Dacă $|r| < 1$, $r^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ şi deci

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2) = \lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

(căci integrala există !). Dacă $|r| > 1$ avem

$$\ln(1 - 2r\cos x + r^2) = \ln r^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\cos x + 1\right)$$

şi ne reducem la cazul precedent. Se obţine

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)dx = 2\pi\ln|r|, \quad |r| > 1.$$

7. v.p. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+9} = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x^2+9} = \frac{\pi}{3}$; v.p. $\int_2^5\frac{dx}{\sqrt[4]{|x-4|}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left(\int_2^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[4]{|x-4|}} + \int_{4+\varepsilon}^{5}\frac{dx}{\sqrt[4]{x-4}}\right)$etc.

8. Se aplică criteriile de comparaţie etc.

9. a) convergente;
b) pentru convergenţa integralei se observă că

$$\left|\frac{\sin x^3}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ şi că } \int_1^\infty x\cos x^3 dx$$

este convergentă (se poate face schimbarea de variabilă $x^3 = t$ şi se aplică criteriul lui Abel). Se poate şi observa că $f(x) = \left(\frac{1}{x}\sin x^3\right)'$.

10. Fie v o diviziune $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ astfel încît $c = x_k$.
$S(v,f) - s(v,f) = x_{k+1} - x_{k-1}$.

Se aplică teorema VIII. 1. $\int_a^b f = 0$ căci $s(v,f) = 0$ $\forall v$.

LECŢIA A IX-A

INTEGRALE CU PARAMETRU (FUNCŢII DEFINITE PRIN INTEGRALE)

INTRODUCERE

Problematica acestei lecţii este o continuare a celor expuse în lecţia a V-a. Integrala este folosită pentru obţinerea de "noi funcţii" în acelaşi mod în care au fost folosite, de exemplu, seriile de puteri. Temele dominante sunt legate de "transferul" de proprietăţi de la funcţiile ce definesc la cele nou definite şi studiul concret al unor funcţii definite prin integrale. Deşi cadrul "natural" al studiului funcţiilor definite prin integrale este teoria integralei Lebesgue (care va fi studiată în lecţiile următoare), am considerat utilă prezentarea subiectului în cadrul mai familiar al integralei Riemann. În finalul lecţiei studiem funcţia Gamma, una din cele mai importante ale Analizei matematice, extindere a factorialului de la numere naturale.

1. Integrale Riemann cu parametru

Fie Y o mulţime nevidă şi $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un interval compact; fie $f : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $x \in [a,b]$, $y \in Y$, o funcţie. Să presupunem că pentru orice $y \in Y$, funcţia $x \mapsto f(x,y)$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Se poate deci defini o nouă funcţie $F : Y \to \mathbb{R}$,

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx .$$

Se spune că funcţia F este definită ca o **integrală cu parametru**, sau că F este o **integrală cu parametru**.

Definiţia IX. 1. Fie Y un spaţiu metric, $A \subset Y$, $\beta \in Y$ un punct de acumulare pentru A, $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Spunem că f tinde către φ cînd y tinde la β **uniform în raport cu** $x \in [a,b]$ dacă: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $y \in A$ cu $0 < d(y,\beta) < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x,y) - \varphi(x)| \le \varepsilon$, $\forall\ x \in [a,b]$ (aici d este distanţa în Y). În acest caz scriem

$$f \underset{y\to\beta}{\overset{U}{\to}} \varphi .$$

TEOREMA IX. 1. $f \underset{y\to\beta}{\overset{U}{\to}} \varphi$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(y_n)_n$ în A, $y_n \to \beta$ $(y_n \neq \beta)$, şirul de funcţii $f_n(x) = f(x,y_n)$ converge uniform către φ.

Demonstraţia acestei teoreme rezultă din definiţii.

TEOREMA IX. 2. Folosind notaţiile din definiţia IX. 1, să presupunem că integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ este definită pe A şi că $f \underset{y\to\beta}{\overset{U}{\to}} \varphi$. Atunci $\varphi \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ şi în plus,

$$\lim_{y\to\beta} F(y) = \lim_{y\to\beta} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{y\to\beta} f(x,y))\,dx .$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $(y_n)_n$ un şir în A, $y_n \to \beta$ $(y_n \neq \beta)$. Şirul de funcţii $f_n(x) = f(x,y_n)$ este un şir de funcţii integrabile Riemann şi $f_n \overset{UC}{\to} \varphi$. Rezultă $\varphi \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$. Fie $\forall\ \varepsilon > 0$. Există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $y \in A$, $0 < d(y,\beta) < \delta_\varepsilon$, să implice $|f(x,y) - \varphi(x)| \le \varepsilon$, $\forall\ x \in [a,b]$. Deducem

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x,y) - \varphi(x))\,dx\right| \le \int_a^b |f(x,y) - \varphi(x)|\,dx \le \varepsilon(b-a) .$$

Deci $\left|F(y) - \int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \le \varepsilon(b-a)$, $0 < d(y,\beta) < \delta_\varepsilon$, ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA IX. 3. (continuitatea integralei cu parametru). Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschisă şi $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$ o funcţie **continuă**. Atunci funcţia $F : A \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ este **continuă**.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\beta \in A$. Pentru demonstrarea teoremei, este suficient să arătăm că $f \underset{y\to\beta}{\overset{U}{\to}} \varphi$ unde $\varphi(x) = f(x,\beta)$, $x \in [a,b]$. Fie $\forall\ \varepsilon > 0$; pentru fiecare

$\alpha \in [a,b]$, f este continuă în (α,β) deci există o vecinătate V_α a lui α deschisă în $[a,b]$ şi o vecinătate (deschisă) W_α a lui β în A astfel încît

$$|f(x,y) - f(\alpha,\beta)| \le \frac{\varepsilon}{2},\ x \in V_\alpha,\ y \in W_\alpha \text{ deci}$$

$$|f(x,y) - f(x,\beta)| \le \varepsilon,\ x \in V_\alpha,\ y \in W_\alpha.$$

Familia $(V_\alpha)_{\alpha \in [a,b]}$ este o acoperire deschisă a compactului $[a,b]$ deci putem extrage o acoperire finită $\{V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n}\}$. Să notăm $W = W_{\alpha_1} \cap ... \cap W_{\alpha_n}$ şi fie $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $B(\beta,\delta_\varepsilon) \subset W$. Avem

$$|f(x,y) - f(x,\beta)| \le \varepsilon,\ \forall\, x \in [a,b] \text{ şi } y \in B(\beta,\delta_\varepsilon),$$

ceea ce demonstrează că $f \underset{y \to \beta}{\overset{U}{\to}} \varphi$.

TEOREMA IX. 4. (a lui Leibniz, de derivare a integralelor cu parametru). Fie $f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ o funcţie **continuă** ($(c,d) \subset \mathbb{R}$ un interval deschis nevid). Presupunem că $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este **continuă** pe $[a,b] \times (c,d)$. Atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ este o funcţie **derivabilă** pe (c,d) şi $\forall\, y \in (c,d)$,

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $\forall\, y_0 \in (c,d)$. Vom arăta că

$$F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx.$$

Aceasta revine la

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\to} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx.$$

Este suficient să arătăm că $g(x,y) = \dfrac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}$, $y \ne y_0$ tinde la $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$ **uniform** în raport cu x cînd $y \to y_0$. Acest fapt rezultă din teorema creşterilor finite $\dfrac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_x)$ cu ξ_x între y şi y_0, folosind continuitatea

funcţiei $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi teorema IX. 2. Teorema IX. 4 se mai numeşte şi "teorema de derivare sub integrală".

EXEMPLU. Pentru n natural (fixat), definim

$$F_n(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^n},\ y \in (0,\infty).$$

Aplicînd teorema IX. 4, obţinem

$$F_n'(y) = -2ny \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{n+1}} = -2nyF_{n+1}(y).$$

Pornind de la $F_1(y) = \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$, se pot obţine prin derivări succesive integralele F_n.

Fie $f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ **continuă** şi astfel încît $\frac{\partial f}{\partial y}$ să fie **continuă**. Considerăm funcţia

$$\Phi(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)\,dx,\ u,v \in [a,b],\ y \in (c,d).$$

Folosind proprietăţile integralei Riemann şi teorema IX. 4, deducem:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v,y) = -f(u,y),\quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v,y) = f(v,y),\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u,v,y) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Să presupunem că $u,v : (c,d) \to [a,b]$ sunt funcţii de clasă C^1, $u = u(y)$, $v = v(y)$ şi că $f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ este continuă şi cu $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă. Să considerăm funcţia:

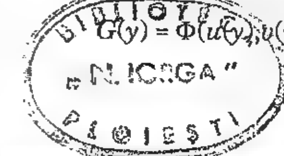
$$G(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx.$$

G este derivabilă pe (c,d) şi avem formula:

$$G'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + v'(y)f(v(y),y) - u'(y)f(u(y),y),$$

numită "regula generală de derivare sub integrală". În adevăr,

$$G(y) = \Phi(u(y),v(y),y).$$



şi se aplică teorema de derivare a funcţiilor compuse.

TEOREMA IX. 5. (integrarea integralelor cu parametru). Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy .$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru $x \in [a,b]$, considerăm

$$F(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(t,y)\,dy \right) dt \text{ şi } G(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)\,dt \right) dy .$$

Deducem cu uşurinţă că F şi G sunt derivabile pe $[a,b]$ şi

$$F'(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy = G'(x) .$$

Dar $F(a) = G(a) = 0$, deci $F = G$ pe $[a,b]$; în particular, $F(b) = G(b)$, ceea ce era de demonstrat.

Comentariu. Teorema IX. 5 se mai numeşte "regula de intervertire a ordinii de integrare" şi arată că două integrale "iterate" sunt egale. Semnificaţia acestui fapt va spori atunci cînd vom arăta, în lecţiile viitoare, că valoarea comună a celor două integrale iterate este tocmai integrala "dublă" a funcţiei f pe dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$.

2. Integrale improprii cu parametru

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}, x \in [a,b), y \in A$. Vom presupune că pentru orice $y \in A$, funcţia $x \mapsto f(x,y)$ este local integrabilă pe $[a,b)$ şi că $\int_a^b f(x,y)\,dx$ converge.

Se poate defini funcţia $F : A \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$. Se spune că funcţia F este definită ca o **integrală improprie cu parametru**, sau că F este o **integrală improprie cu parametru.**

Pentru $a \le t < b$, să considerăm $G(y,t) = \int_a^t f(x,y)\,dx$, $G : A \times [a,b) \to \mathbb{R}$.

Definiţia IX. 2. Dacă, în ipotezele de mai sus, $G \underset{t \to b}{\overset{U}{\to}} F$, atunci spunem că integrala $\int_a^b f(x,y)\,dx$ **converge uniform** (în raport cu y) pe A.

Să observăm că aceasta revine la: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, b_\varepsilon < b$ astfel încît $\left| \int_t^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$, pentru orice $b_\varepsilon < t < b$ şi orice $y \in A$.

TEOREMA IX. 6. (continuitatea integralei improprii cu parametru). Să presupunem că funcţia $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}$ este continuă şi că $\int_a^b f(x,y)\,dx$ **converge uniform** pe A. Atunci funcţia $F : A \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, este continuă.

DEMONSTRAŢIE. Alegem un şir $t_n \to b$, $a \le t_n < b$. Folosind teorema IX. 1, rezultă că şirul de funcţii $G_n(y) = G(y,t_n)$ converge uniform la F ($G_n \overset{UC}{\to} F$). Teorema IX. 3 asigură continuitatea funcţiilor G_n, iar convergenţa uniformă a şirului $(G_n)_n$ transferă continuitatea la funcţia limită F.

TEOREMA IX. 7. (derivarea integralei improprii cu parametru). Să presupunem că $f : [a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ este continuă şi că există $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă. Dacă $\int_a^b f(x,y)\,dx$ este convergentă şi dacă integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ este **uniform convergentă** pe A, atunci funcţia $F : (c,d) \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, este derivabilă pe (c,d) şi $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ (Leibniz).

DEMONSTRAŢIE. Alegem un şir $t_n \to b$, $a \le t_n < b$. Şirul de funcţii $G_n(y) = G(y,t_n)$ converge (punctual) la F şi folosind teorema IX. 4, $G_n' \overset{U}{\to} H$, unde

$H(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$. Aplicînd teorema de derivare termen cu termen a şirurilor de funcţii, F este derivabilă şi $F' = H$. Teorema IX. 7 se numeşte şi teorema de derivare sub integrală.

TEOREMA IX. 8. Fie $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încît $\int_a^b f(x,y)dx$ să fie uniform convergentă. Atunci

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $t_n \to b$, $a \le t_n < b$. Folosind notaţiile anterioare $G_n \overset{U}{\to} F$. Deci $\int_c^d G_n(y)dy \to \int_c^d F(y)dy$ sau $\int_c^d\left(\int_a^{t_n} f(x,y)\,dx\right)dy \to \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$. Aplicînd teorema IX. 5, rezultă că $\int_c^d\left(\int_a^{t_n} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^{t_n}\left(\int_c^d f(x,y)dx\right)dy$. Deci există $\lim_{n\to\infty}\int_a^{t_n}\left(\int_c^d f(x,y)dx\right)dy$ şi această limită este egală cu $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$. Dar şirul $(t_n)_n$ era arbitrar aşa că rezultă că $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dx\right)dy$ este **convergentă** şi are loc egalitatea din enunţ.

OBSERVAŢIE. Rezultate analoage teoremelor precedente se obţin (cu modificări evidente) în cazul intervalelor $(a,b]$ sau (a,b). Lăsăm în seama cititorului formularea şi demonstrarea acestora.

Din cele de mai sus rezultă importanţa noţiunii de uniform convergenţă a integralelor improprii. Este astfel util să avem **criterii** de convergenţă uniformă a integralelor. Iată cîteva:

Criteriul general (Cauchy). Fie $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}$ astfel încît pentru orice $y \in A$, funcţia $x \mapsto f(x,y)$ este local integrabilă. Atunci $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ b_\varepsilon < b$ astfel încît pentru orice u,v

$b_\varepsilon < u,v < b$, avem $\left|\int_u^v f(x,y)dx\right| < \varepsilon$, pentru orice $y \in A$.

Demonstraţia repetă ideile din demonstraţia criteriului analog pentru integrale improprii.

Se deduce imediat

Criteriul de comparaţie. Fie f ca mai sus şi $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ astfel încît $|f(x,y)| \le g(x)$ pentru orice $x \in [a,b)$ şi $y \in A$. Dacă $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă.

EXEMPLU. Să considerăm $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2}dx$, $y \in \mathbb{R}$. Avem $\left|\frac{\sin xy}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in [0,\infty)$ şi $\forall\, y \in \mathbb{R}$. Integrala $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ fiind convergentă, rezultă $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2}dx$ uniform convergentă. Observînd că $f(x,y) = \frac{\sin xy}{1+x^2}$ este continuă pe $[0,\infty) \times \mathbb{R}$, deducem din teorema IX. 6 că funcţia $F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2}dx$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

Criteriul lui Abel. Fie $f : [a,b) \times I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, I un interval în $\mathbb{R}$, astfel încît $\lim_{x\to b} f(x,y) = 0$ uniform în raport cu y şi $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx$ să fie uniform convergentă. Fie $g : [a,b) \times I \to \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că există $M > 0$ astfel încît

$$\left|\int_a^x g(x,y)dy\right| \le M,\ \forall\ x \in [a,b) \text{ şi } \forall\ y \in I.$$

În aceste condiţii, $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ converge uniform. Demonstraţia reia ideile din criteriul lui Abel pentru integrale improprii.

EXEMPLU. Fie $F(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx, y \ge 0$. Din inegalitatea $\left|\frac{e^{-xy}\sin x}{x}\right| \le e^{-xy}$, se deduce imediat că F este bine definită pentru $y > 0$. Pentru $y = 0$, $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$, care este convergentă. În definitiv, avem o funcţie $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Vom încerca să calculăm F determinînd astfel şi valoarea integralei $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Pentru aceasta să observăm pentru început că F este **continuă**. În adevăr, este suficient să arătăm că $G(y) = \int_1^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$ este o funcţie continuă cu $F(y) = \int_0^1 e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx + G(y)$ ($\int_0^1 e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$ este de fapt o integrală Riemann cu parametru).

Pentru a arăta că G este continuă, este suficient să arătăm că este uniform convergentă integrala $\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$. Pentru aceasta se poate aplica criteriul lui Abel luînd $f(x,y) = \frac{e^{-xy}}{x}$ şi $g(x,y) = \sin x$. În continuare, avem pentru $y > 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(e^{-xy}\frac{\sin x}{x}) = -e^{-xy}\sin x$, $x \in [0,\infty)$. Fie $y_0 > 0$. Pentru $y \ge y_0$ $|e^{-xy}\sin x| \le e^{-xy_0}$. Aplicînd criteriul de comparaţie, deducem că $\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx$ converge uniform pentru $y \ge y_0$.

Teorema de derivare a integralelor improprii cu parametru se poate deci aplica şi obţinem $F'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx, y > y_0$. Cum însă $y_0 > 0$ era arbitrar deducem că $F'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx$, $\forall y > 0$. Un calcul simplu arată că $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$, $y > 0$ şi deci

$$F(y) = -\operatorname{arctg} y + C, \ C \text{ constantă}, \ \forall y > 0.$$

Dar $|F(y)| \le \int_0^\infty e^{-xy}dx = \frac{1}{y}$, $y > 0$ şi deci $\lim_{y\to\infty} F(y) = 0$. Ca atare $C = \frac{\pi}{2}$ şi în definitiv $F(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y$, $y > 0$. Dar F este continuă pe $[0,\infty)$ şi deci $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = F(0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} F(y) = \frac{\pi}{2}$, rezultat remarcabil. Se deduce imediat că:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0. \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

3. Funcţiile B, Γ

Definiţia IX. 3. Funcţia gamma a lui Euler, $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, se defineşte prin

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha > 0.$$

Pentru fiecare $\alpha \in (0,\infty)$, $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ converge. În adevăr, este suficient să arătăm convergenţa integralelor $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

Pentru prima integrală observăm că $x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha-1}$, $x \in (0,1]$ şi cum $\alpha > 0$, $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ converge.

Pentru a doua integrală, avem, de exemplu, $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}x^{\alpha-1} = 0$ $(\alpha > 0)$ şi aplicăm criteriul de convergenţă la limită. Mai mult, notînd

$$F_1(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \ F_2(\alpha) = \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \ \alpha > 0$$

şi observînd că pentru $\alpha_0 > 0$ avem

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha_0-1}, \ \forall x \in (0,1] \text{ şi } \alpha \ge \alpha_0,$$

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha_0-1}e^{-x}, \ \forall\, x \in [1,\infty) \text{ şi } \alpha \in (0,\alpha_0].$$

Deducem, folosind criteriul de comparaţie pentru integrale improprii cu parametru, continuitatea funcţiilor F_1 şi F_2 pe $(0,\infty)$ şi în definitiv continuitatea funcţiei $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, deoarece $\Gamma = F_1 + F_2$. Continuînd în aceeaşi manieră şi aplicînd teorema de derivare a integralelor improprii cu parametru, se poate arăta că Γ este de clasă C^∞ pe $(0,\infty)$ şi

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}\,dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

În plus, un calcul evident arată că

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

TEOREMA IX. 9. Pentru orice $\alpha > 0$, avem $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha)$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru $0 < a < b < \infty$ avem

$$\int_a^b x^\alpha e^{-x}\,dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_a^b + \alpha\int_a^b x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Trecînd la limită pentru $a \to 0$, $b \to \infty$ obţinem

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx = \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

COROLAR. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n + 1) = n!$. Aşadar, funcţia gamma este o extindere a funcţiei factorial.

Definiţia IX. 4. Funcţia beta $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se defineşte prin

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Este un exerciţiu simplu stabilirea convergenţei integralei pentru $p,q > 0$ (integrala este improprie pe intervalul $(0,1)$). Astfel se consideră separat

$$\int_0^\varepsilon x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \ \text{ şi } \int_\varepsilon^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \ 0 < \varepsilon < 1$$

şi se aplică criteriul de comparaţie cu $\dfrac{1}{x^k}$ respectiv cu $\dfrac{1}{(1-x)^k}$.

Este imediat de observat că $B(p,q) = B(q,p)$, $\forall\, p,q > 0$.
Vom da fără demonstraţie următorul rezultat util.

TEOREMA IX. 10.

1) $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q > 0;$$

2) $$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1.$$

Utilizînd această teoremă, deducem

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \ \text{ şi deci } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Dar $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (cu o schimbare evidentă de variabilă).

În definitiv, $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ şi deci $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, rezultat important (folosit în teoria probabilităţilor, la studiul repartiţiei normale).

4. 10 exerciţii

1. Să se calculeze $F(y) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1 + y\cos x)}{\cos x}\,dx$, $|y| < 1$, prin derivarea integralei cu parametru.

2. Să se calculeze $G(y) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x)\,dx$, $y > 1$.

3. Să se arate că $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$ converge uniform în raport cu α pentru $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

4. Să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

5. Să se calculeze $\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx$, $\alpha,\beta > 0$.

6. Să se calculeze $I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$ şi $J = \int_0^{\infty} x^p \exp(-x^q)dx$, $p > -1$, $q > 0$.

7. Să se calculeze $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\,dx$ punînd $\sin^2 x = t$ şi folosind funcţiile B, Γ.

8. Să se calculeze $I(b) = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$, $b \in \mathbb{R}$.

9. Să se arate că $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a}$, $a,b > 0$.

10. Să se calculeze $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}dx$, $a,b > 0$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Se prelungeşte funcţia $\frac{\ln(1 + y\cos x)}{\cos x}$ prin continuitate în punctele $(\frac{\pi}{2}, y)$ cu valoarea y. Prin derivare sub integrală avem

$$F'(y) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + y\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} \quad (\text{cu } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \text{ etc.}).$$

Deci $F(y) = \pi\arcsin y + C$ dar $F(0) = 0$ deci $C = 0$. În definitiv $F(y) = \pi\arcsin y$.

2. $G'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y\,dx}{y^2 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}}$ ($\operatorname{tg}x = t$ etc.) sau $G(y) = \pi\ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) + C$. Pentru determinarea constantei C se scrie

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x)dx - \pi\ln(y + \sqrt{y^2-1}) = \pi\ln\frac{y}{y + \sqrt{y^2-1}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{y^2}\sin^2 x)dx.$$

Dar $|\ln(1 - \frac{1}{y^2}\sin^2 x)| \le |\ln(1 - \frac{1}{y^2})|$ şi făcînd $y \to +\infty$ obţinem $C = -\pi\ln 2$ etc.

3. Integrala $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ este convergentă deci $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_0$ astfel încît $A > A_0$ să implice $|\int_A^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt| < \varepsilon$. Avem $\int_A^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \int_{A\alpha}^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt$. Luînd $A > \frac{A_0}{\alpha_0}$ vom avea $|\int_A^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx| < \varepsilon$ $\forall\, \alpha \ge \alpha_0$ deci uniform convergenţa integralei.

4. Se pleacă de la $F(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ $y \ge 0$ care se calculează prin derivare sub integrală. Se obţine $F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(y + \sqrt{1+y^2})$ şi deci $I = F(1) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

5. $\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx\right\}$ şi folosind

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

deducem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx = \begin{cases} 0, & \alpha < \beta \\ \frac{\pi}{4}, & \alpha = \beta \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha > \beta \end{cases}$$

6. În $I = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$ se face schimbarea $x = \frac{t}{1-t}$ şi se ajunge la

$$I = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Pentru $J = \int_0^{\infty} x^p e^{-x^q}dx$ se face $x^q = t$ şi se ajunge la funcţia Γ.

7. Cu schimbarea $\sin^2 x = t$ se ajunge la $I = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{32}$.

8. După verificarea condiţiilor de derivare sub integrală obţinem

$$I'(b) = -\int_0^\infty 2e^{-x^2}x\sin bx\,dx$$

şi o integrare prin părţi conduce la relaţia $I'(b) = -2bI$.

Se obţine $I(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$ (folosind $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

9. $\int_0^\infty e^{-xy}dx$ este uniform convergentă în raport cu y pentru $y \geq y_0 > 0$. Obţinem

$$\int_0^\infty\left(\int_a^b e^{-xy}dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_0^\infty e^{-xy}dx\right)dy,$$

de unde rezultatul.

10. Se procedează analog exerciţiului 9 folosind exerciţiul 3. Se obţine $I = \frac{\pi}{2}(b-a)$.

LECŢIA A X-A

MĂSURĂ ŞI INTEGRALĂ

INTRODUCERE

Această lecţie este consacrată prezentării primelor noţiuni de teoria măsurii. Este o lecţie ceva mai abstractă decît precedentele, din cauza gradului de generalitate al subiectului. Considerăm utilă această generalitate care, odată însuşită, deschide largi posibilităţi de aplicare (în teoria probabilităţilor, analiza Fourier, în studiul fractalilor etc.). Exemplul fundamental al măsurii Lebesgue în $\mathbb{R}^n$ va fi analizat în lecţia următoare.

1. Măsurabilitatea

Pentru o mulţime nevidă fixată X vom nota cu $\mathcal{P}(X)$ mulţimea părţilor sale. Deci sunt echivalente afirmaţiile: $A \in \mathcal{P}(X)$ şi $A \subset X$.

Definiţia X. 1. O submulţime $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, deci o colecţie de părţi ale lui X, se numeşte **σ – algebră pe** X dacă:

i) $X \in \mathcal{A}$;

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{A}$;

iii) $(A_n)_n$ şir în $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Rezultă imediat şi următoarele proprietăţi:

iv) $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{A}$;

v) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A - B \in \mathcal{A}$;

vi) $(A_n)_n$ şir în $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$.

EXEMPLUL 1. $\mathcal{P}(X)$ este o σ – algebră pe X.

EXEMPLUL 2. Dacă $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ este o familie de σ – algebre pe X, atunci $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$

este o σ – algebră pe X.

TEOREMA X. 1. Fie $C \subset \mathcal{P}(X)$. **Există** şi este **unică** o σ – algebră $\mathcal{A}$ pe X astfel încît:

1) $C \subset \mathcal{A}$;

2) dacă $\mathcal{B}$ este o σ – algebră pe X astfel încît $C \subset \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

σ – algebra $\mathcal{A}$ se numeşte σ – algebra **generată** de C.

DEMONSTRAŢIE. Fie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ familia tuturor σ – algebrelor pe X cu proprietatea că $C \subset \mathcal{A}_i$, $\forall\, i \in I$ (asemenea algebre există, de exemplu $\mathcal{P}(X)$). Este suficient să luăm $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Definiţia X. 2. Dacă $\mathcal{A}$ este o σ – algebră pe X, perechea $(X,\mathcal{A})$ se numeşte **spaţiu măsurabil**, iar mulţimile din $\mathcal{A}$ **mulţimi măsurabile** (în X).

Dacă nu este pericol de confuzie, spaţiul măsurabil $(X,\mathcal{A})$ va fi notat X.

Definiţia X. 3. Fie $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ spaţii măsurabile. O funcţie $f : X \to Y$ se zice **măsurabilă** dacă pentru orice $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

TEOREMA X. 2. Compunerea a două funcţii măsurabile este măsurabilă.
Demonstraţia este imediată.

Definiţia X. 4. Fie X o mulţime. O submulţime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte **topologie** pe X dacă:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

ii) $A,B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$;

iii) pentru orice familie $(A_i)_{i \in I}$ de elemente din $\mathcal{T}$, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ este în $\mathcal{T}$.

EXEMPLUL 1. $\mathcal{P}(X)$ este o topologie pe X (numită topologia **discretă**).

EXEMPLUL 2. Dacă $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ este o familie de topologii pe X, atunci $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ este o topologie pe X.

TEOREMA X. 3. Fie $C \subset \mathcal{P}(X)$. **Există** şi este **unică** o topologie $\mathcal{T}$ pe X astfel încît:

1) $C \subset \mathcal{T}$;

2) Dacă $\mathcal{S}$ este o topologie pe X astfel încît $C \subset \mathcal{S}$ atunci $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Topologia $\mathcal{T}$ se numeşte topologia **generată** de C.

Demonstraţia este similară cu cea a teoremei X. 1.

Definiţia X. 5. Dacă $\mathcal{T}$ este o topologie pe X atunci perechea $(X,\mathcal{T})$ se numeşte **spaţiu topologic**, iar mulţimile din $\mathcal{T}$ se zic **mulţimi deschise** (în X).

Dacă nu este pericol de confuzie, spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ va fi notat X. Elementele unui spaţiu topologic se zic **puncte**.

EXEMPLUL 1. Fie (X,d) un spaţiu **metric**. Familia $\mathcal{T}$ a mulţimilor **deschise** în X este o topologie pe X (conform teoremei III. 4). Aceasta este numită topologia **canonică** a unui spaţiu metric.

În cele ce urmează, spaţiile metrice vor fi considerate spaţii topologice cu topologia canonică.

EXEMPLUL 2. Fie $X = \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$. Considerăm pe $\overline{\mathbb{R}}$ topologia **generată** de toate intervalele de tipul $[-\infty,\beta)$, (a,b), $(\alpha,+\infty]$, $\alpha,\beta,a,b \in \mathbb{R}$. Se arată uşor că orice mulţime deschisă a acestei topologii se poate scrie ca reuniune **numărabilă** de intervale de tipul de mai sus. Pe de altă parte, mulţimile deschise în $\overline{\mathbb{R}}$ conţinute în $\mathbb{R}$ sunt exact mulţimile topologiei canonice a lui $\mathbb{R}$ ca spaţiu metric cu distanţa uzuală.

$\overline{\mathbb{R}}$ va fi considerat spaţiu topologic, cu topologia descrisă în acest exemplu.

Definiţia X. 6. Fie $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ spaţii topologice.

i) o funcţie $f : X \to Y$ se zice **continuă în punctul** $a \in X$ dacă pentru orice $B \in \mathcal{S}$, $f(a) \in B$ există $A \in \mathcal{T}$, $a \in A$, $A \subset f^{-1}(B)$.

ii) $f : X \to Y$ se zice **continuă** dacă pentru orice $B \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

OBSERVAŢIE. Evident, f este continuă dacă şi numai dacă este continuă în orice punct din X.

TEOREMA X. 4. Compunerea a două funcţii continue este continuă.

Demonstraţia este imediată.

Comentariu. Măsurabilitatea decrie în mod axiomatic cadrul "calitativ" al măsurării mulţimilor (intuitiv – arii ale mulţimilor plane, volume etc.). Topologia descrie cadrul natural al unei "geometrii" foarte generale. Aceste structuri permit studiul funcţiilor măsurabile şi respectiv al funcţiilor continue.

Definiţia X. 7. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic. σ – algebra generată de $\mathcal{T}$ se numeşte σ – algebra mulţimilor **boreliene** sau mai pe scurt σ – algebra Borel pe X (după numele matematicianului francez E. BOREL, 1871 – 1956).

EXEMPLUL 1. Într-un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$, complementarele mulţimilor deschise se zic mulţimi **închise**. Orice mulţime închisă este boreliană.

EXEMPLUL 2. În $\mathbb{R}$ intervalele $[a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$ sunt mulţimi boreliene.

În cele ce urmează, vom întîlni în general următoarea situaţie.

Definiţia X. 8. Fie $(X,\mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $(Y,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic. O funcţie $f: X \to Y$ se zice **măsurabilă** dacă pentru orice mulţime $B \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, deci f întoarce mulţimi deschise în mulţimi măsurabile.

OBSERVAŢII. 1) Se poate arăta cu uşurinţă că în cazul definiţiei X. 8, f este măsurabilă dacă şi numai dacă f este măsurabilă în sensul definiţiei X. 3, dacă pe Y se consideră σ – algebra mulţimilor **boreliene**.
2) Rezultă imediat că dacă $f: X \to Y$ este măsurabilă şi $g: Y \to Z$ continuă atunci $g\circ f: X \to Z$ este măsurabilă.

EXEMPLU. Fie $(X,\mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se poate arăta că f este măsurabilă $\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha,+\infty] \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}[-\infty,\alpha) = \{x \in X \mid f(x) \le \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Urmărim stabilirea principalelor proprietăţi algebrice ale funcţiilor măsurabile. Vom începe prin următoarea:

TEOREMA X. 5. Fie $(X,\mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $f = (f_1,f_2): X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f_1(x),f_2(x))$, o funcţie. Atunci f este măsurabilă dacă şi numai dacă $f_1,f_2 : X \to \mathbb{R}$ sunt măsurabile.

DEMONSTRAŢIE. Aşa cum am stabilit mai sus, $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^2$ sunt spaţii topologice în mod natural. Dacă f este măsurabilă, atunci f_1, f_2 rezultă măsurabile folosind observaţia 2) de mai sus.
Pentru demonstrarea implicaţiei inverse, să observăm că orice mulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$ reuniunea numărabilă de dreptunghiuri deschise cu laturile paralele cu axele (produse carteziene $I_1 \times I_2$ de intervale deschise). Este deci suficient să arătăm că pentru orice astfel de dreptunghi $I_1 \times I_2$, $f^{-1}(I_1 \times I_2)$ este măsurabilă în X. Dar

$$f^{-1}(I_1 \times I_2) = f_1^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2),$$

$f_1^{-1}(I_1)$, $f_2^{-1}(I_2)$ sunt măsurabile prin ipoteză şi $\mathcal{A}$ este σ – algebră.

TEOREMA X. 6. 1) Dacă $f,g : X \to \mathbb{R}$ sunt măsurabile atunci $f+g$, fg sunt măsurabile.
2) Dacă $f,g : X \to \mathbb{C}$ sunt măsurabile atunci $f+g$, fg sunt măsurabile.
3) $A \subset X$ este măsurabilă dacă şi numai dacă funcţia sa caracteristică

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

este măsurabilă ($\chi_A : X \to \mathbb{R}$ sau $\chi_A : X \to \{0,1\}$, $\{0,1\}$ cu topologia discretă).

DEMONSTRAŢIE. Pentru 1) totul rezultă din teorema precedentă şi din observaţia că funcţiile $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(s(x,y) = x+y, p(x,y) = xy)$ sunt continue. De exemplu f,g măsurabile $\Rightarrow h = (f,g): X \to \mathbb{R}^2$ măsurabilă $\Rightarrow$ $s\circ h = f+g$ măsurabilă.
Pentru 2) se arată întîi că f este măsurabilă dacă şi numai dacă $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ sunt măsurabile (în fapt teorema X. 6) şi apoi se aplică 1).
3) este o simplă verificare.

Să studiem acum comportarea măsurabilităţii la trecerile la limită. Pentru aceasta să precizăm următoarele:

Dacă $(f_n)_n$ este un şir de funcţii $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, definim funcţiile $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$, ca funcţii $X \to \overline{\mathbb{R}}$, prin:

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n (f_n(x))\,; \quad (\inf_n f_n)(x) = \inf_n (f_n(x))\,;$$

$$(\limsup f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \sup(f_n(x))\,; \quad (\liminf f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \inf(f_n(x))\,,$$

pentru orice $x \in X$. Desigur $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ **punctual** dacă şi numai dacă

$$\liminf f_n = \limsup f_n = f.$$

TEOREMA X. 7. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii **măsurabile** $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Atunci funcţiile $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ sunt **măsurabile**.

DEMONSTRAŢIE. Reamintim că pentru un şir $(a_n)_n$ în $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\limsup a_n = \inf_k \sup_{n\ge k} a_n\,, \quad \liminf a_n = \sup_k \inf_{n\ge k} a_n\,,$$

deci este suficient să demonstrăm teorema pentru $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$. Fie $g = \sup_n f_n$. Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$$g^{-1}(\alpha, +\infty] = \bigcup_n f_n^{-1}(\alpha, +\infty]$$

deci $g^{-1}(\alpha,+\infty]$ este măsurabilă căci $f_n^{-1}(\alpha,+\infty]$ sunt mulţimi măsurabile $\forall\, n$, deci şi reuniunea lor (familia fiind numărabilă). Conform exemplului de după definiţia X. 8, g rezultă măsurabilă. Pentru $\inf_n f_n$ se foloseşte un raţionament asemănător.

COROLAR. Dacă $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ **punctual** şi f_n sunt măsurabile, atunci f este măsurabilă.

Definiţia X. 9. O funcţie $s : X \to [0,+\infty)$ se numeşte **simplă** dacă $s(X)$ este o mulţime **finită**, adică s are doar un număr finit de valori, pozitive.

OBSERVAŢIE. Dacă s este o funcţie simplă şi $s(X) = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ atunci $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ unde $A_i = \{x \in X \mid s(x) = \alpha_i\}$, χ_{A_i} fiind funcţia caracteristică a mulţimii A_i. Este uşor de verificat că s este măsurabilă dacă şi numai dacă $A_1,...,A_n$ sunt măsurabile.

TEOREMA X. 8. Fie $f : X \to [0,+\infty]$ o funcţie măsurabilă. Există un şir $(s_n)_n$ de funcţii **simple măsurabile** astfel încît:
1) $(s_n)_n$ este crescător ($s_n \le s_{n+1}$, $\forall\, n$)
2) $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ (punctual).
(Deci f poate fi "aproximată" cu funcţii **simple**).

DEMONSTRAŢIE. Pentru $n = 1,2,...$ şi $1 \le i \le n2^n$, definim

$$E_{n,i} = f^{-1}\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \quad F_n = f^{-1}[n, +\infty].$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Se arată cu uşurinţă că $(s_n)_n$ este un şir crescător de funcţii simple măsurabile şi că $s_n \to f$ punctual. (În adevăr, de exemplu, pentru $x \in X$, dacă $f(x) = +\infty$ atunci $s_n(x) = n$ pentru fiecare $n = 1,2,...$ Dacă $f(x) < +\infty$ atunci de la un rang încolo

$$0 \le f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n}$$

din modul de construcţie al şirului $(s_n)_n$). Deci $s_n(x) \to f(x)$, $\forall\, x \in X$.

Comentariu. Pentru orice experienţă fixată (de exemplu, prezentarea la examen sau aruncarea cu zarul etc.), evenimentele asociate formează o σ – algebră pe spaţiul X al evenimentelor elementare. În acest caz funcţiile măsurabile $X \to \mathbb{R}$ se numesc **variabile aleatoare**. Toate proprietăţile anterioare au loc pentru variabile aleatoare. Aşadar, o mărime ξ este o variabilă aleatoare $\Leftrightarrow \forall\, c \in \mathbb{R}$, $\{\xi < c\} = \{x \in X \mid \xi(x) < c\}$ este un eveniment. ♣

2. Măsura

Definiţia X. 10. Fie $(X,\mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil. O aplicaţie $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ se numeşte **măsură pe** X dacă
1) $\mu(\emptyset) = 0$;
2) pentru orice şir $(A_n)_n$ în $\mathcal{A}$, astfel încît $A_n \cap A_m = \emptyset$ pentru $n \ne m$, să rezulte

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu(A_n).$$

Ultima proprietate se numeşte **numărabil – aditivitate**.

OBSERVAŢIE. În ceea ce priveşte notaţia $\sum_n \mu(A_n)$, aceasta se consideră $+\infty$ dacă cel puţin unul din termeni este $+\infty$ (sau dacă seria este divergentă) şi reprezintă suma seriei respective dacă aceasta este convergentă (această convenţie coincide cu o aritmetică "naturală" în $[0,+\infty]$ şi vom reveni).

TEOREMA X. 9. Fie μ o măsură pe $(X,\mathcal{A})$. Atunci:
1) Dacă $A_1,...,A_n \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \ne j$ rezultă

$$\mu(A_1 \cup ... \cup A_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n)$$

(deci măsura este **finit aditivă**);
2) $A,B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$.

DEMONSTRAŢIE. 1) Se ia şirul $A_1,...,A_n,\emptyset,\emptyset,...$ şi se aplică definiţia măsurii.
2) $B = A \cup (B - A)$ şi se aplică finit aditivitatea demonstrată şi pozitivitatea măsurii.

TEOREMA X. 10. Fie μ o măsură pe $(X,\mathcal{A})$.
1) Dacă $(A_n)_{n\ge1}$ este un şir în $\mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ atunci

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

2) Dacă $(A_n)_{n\geq 1}$ este un şir în $\mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ şi $\mu(A_1) < +\infty$, atunci

$$\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

3) Pentru orice şir $(A_n)_n$ în $\mathcal{A}$,

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \text{ (\textbf{subaditivitate})}.$$

DEMONSTRAŢIE.
1) Definim şirul

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, \ldots B_n = A_n - A_{n-1}, \ldots$$

$(B_n)_n$ este un şir în $\mathcal{A}$ şi $B_n \cap B_m = \emptyset$ dacă $n \neq m$. În plus

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n \text{ şi } A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n.$$

Deci $\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigcup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n)$, iar $\mu(A_n) = \mu(B_1) + \ldots + \mu(B_n)$. Deci $(\mu(A_n))_n$ este şirul de sume parţiale ale seriei $\sum_n \mu(B_n)$ şi se obţine rezultatul.

2) Se consideră şirul $C_n = A_1 - A_n$ şi se aplică punctul precedent (atenţie la condiţia $\mu(A_1 < +\infty$!).
3) Trimitem la exerciţiul 4 al acestei lecţii.

EXEMPLUL 1. Fie X o mulţime şi $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Definim

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } A \text{ este infinită} \\ \text{card}A & \text{dacă } A \text{ este finită} \end{cases}$$

(card A este numărul de elemente ale lui A). Se arată simplu că μ este o măsură; μ se numeşte **măsura de numărare** pe X. De o importanţă deosebită este **măsura de numărare** pe $\mathbb{N}$. Pentru moment să arătăm că folosind măsura de numărare pe $\mathbb{N}$ putem să dăm un exemplu care să justifice condiţia $\mu(A_1) < +\infty$ în punctul 2) din teorema precedentă. Să luăm $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Evident, $A_n \supset A_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\mu(A_n) = +\infty$, $\forall\, n$.
Dar $\bigcap_n A_n = \emptyset$ şi deci $0 = \mu(\bigcap_n A_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$.

EXEMPLUL 2. Fie X o mulţime şi $a \in X$. Luăm $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ şi definim

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a \in A \\ 0 & \text{dacă } a \notin A \end{cases}, \quad A \subset X.$$

Se verifică imediat că δ_a este o **măsură**, numită **măsura Dirac** concentrată în "punctul" a (după numele marelui fizician englez P. DIRAC, 1902 – 1986).

EXEMPLUL 3. Fie X o mulţime **finită**, nevidă şi $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Definim

$$\mu(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}X}.$$

Se verifică imediat că μ este o **măsură** şi $\mu(X) = 1$. În fapt avem o variantă "relativă" a măsurii de numărare. Cititorii vor recunoaşte cu uşurinţă în acest exemplu modelul "clasic" al teoriei probabilităţilor discrete.

Definiţia X. 11. Dacă μ este o măsură pe $(X, \mathcal{A})$, atunci tripletul $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se numeşte **spaţiu cu măsură**. Un spaţiu cu măsură $(X, \mathcal{A}, \mu)$ cu $\mu(X) = 1$ se numeşte **cîmp de probabilitate** şi în acest caz măsura μ se numeşte **probabilitate**.

EXEMPLU. $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$ din exemplul 2. de mai sus este un cîmp de probabilitate şi măsura Dirac este o probabilitate.

Comentariu. Teoria probabilităţilor apare ca o parte a teoriei măsurii, o parte cu problematică specifică, dar conceptual conţinută în teoria măsurii. Această abordare, datorată lui A. N. KOLMOGOROV (1903 – 1987), aşază teoria probabilităţilor pe un fundament teoretic solid.

3. Integrala

În $[0,+\infty]$ vom extinde adunarea şi înmulţirea punînd:

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty,\ \forall\, a \in [0,\infty] \text{ şi}$$

$$a(+\infty) = (+\infty)a = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a > 0 \\ 0 & \text{dacă } a = 0 \end{cases}$$

Să remarcăm că, prin definiţie, $0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$, convenţie pe care o vom adopta în cele ce urmează. Se verifică uşor că adunarea şi înmulţirea astfel extinse păstrează o serie de proprietăţi ca asociativitatea, comutativitatea etc.
Fie acum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură.

Definiţia X. 12. 1) Pentru orice funcţie **simplă măsurabilă** $s : X \to [0,\infty)$,

$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, definim **integrala** lui s pe X prin:

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

($\alpha_1,...,\alpha_n$ sunt valorile distincte ale lui s).
2) Pentru orice funcţie **măsurabilă** $f: X \to [0,\infty)$, definim **integrala lui** f pe X prin:

$$\int_X f\,d\mu = \sup\{\int_X s\,d\mu,\ s \text{ simplă măsurabilă},\ s \le f\}.$$

Este de remarcat că **orice** funcţie măsurabilă pozitivă are integrală, aceasta putînd fi eventual $+\infty$. O observaţie evidentă arată că pentru funcţii simple măsurabile, definiţiile 1) şi 2) coincid.
Vom stabili proprietăţile cele mai importante ale integralei funcţiilor măsurabile pozitive şi apoi vom extinde definiţia la funcţii cu valori complexe.

TEOREMA X. 11. 1) Fie $f,g : X \to [0,+\infty]$ măsurabile, $f \le g$; atunci

$$\int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu.$$

2) $c \in [0,\infty)$, $f: X \to [0,\infty]$ măsurabilă $\Rightarrow \int_X cf\,d\mu = c\int_X f\,d\mu$.

3) $f \equiv 0 \Rightarrow \int_X f\,d\mu = 0$.

4) Dacă $\mu(X) = 0 \Rightarrow \int_X f\,d\mu = 0$, $\forall f: X \to [0,\infty]$ măsurabilă.

Demonstraţia este imediată.

Definiţia X. 13. Fie $f: X \to [0,\infty]$ măsurabilă şi $A \subset X$, $A \in \mathcal{A}$ (deci A măsurabilă). Definim **integrala funcţiei** f **pe mulţimea** A prin

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu.$$

(χ_A este funcţia caracteristică a mulţimii A).

TEOREMA X. 12. Fie $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ simplă măsurabilă. Să definim

$$\varphi(A) = \int_A s\,d\mu,\quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Atunci $\varphi : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ este o **măsură**.

DEMONSTRAŢIE. $\varphi(\varnothing) = \int_\varnothing s\,d\mu = 0$ evident. Fie $A \in \mathcal{A}$. Se observă imediat că

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A \cap A_i).$$

Să luăm un şir $(E_k)_k$ în $\mathcal{A}$ cu $E_k \cap E_p = \varnothing$ pentru $k \ne p$ şi să punem $E = \bigcup_k E_k$.
Avem

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(a_i \cap E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(E_k),$$

deci φ este numărabil aditivă.

COROLAR. Dacă s,t sunt funcţii simple măsurabile, atunci

$$\int_X (s+t)\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$ şi $E_{ij} = A_i \cap B_j$. Este clar că $X = \cup E_{ij}$, $\int_{E_{ij}} (s+t)\,d\mu = (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_{ij}) = \int_{E_{ij}} s\,d\mu + \int_{E_{ij}} t\,d\mu$ şi aplicăm teorema precedentă.

TEOREMA X. 13. (teorema lui BEPPO LEVI, 1875 – 1961, **de convergenţă monotonă).** Fie $(f_n)_n$ un şir crescător de funcţii măsurabile $f_n : X \to [0,+\infty]$, $f_n \le f_{n+1}$ pentru orice n. Fie $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ (punctual). Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

DEMONSTRAŢIE. Să observăm că $f: X \to [0,\infty]$ este măsurabilă (corolar la

teorema X. 7). Pe de altă parte, şirul $(\int_X f_n d\mu)_n$ este crescător şi fie

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,\ \alpha \in [0,\infty].$$

Din relaţiile $f_n \le f$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă $\int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu$ $\forall n \in \mathbb{N}$ de unde inegalitatea $\alpha \le \int_X f d\mu$.

Pentru a dovedi şi inegalitatea inversă, să luăm $0 < c < 1$ şi s simplă măsurabilă $s \le f$. Să notăm

$$E_n = \{x \in X; f_n(x) \ge cs(x)\},\ n = 1,2,\ldots$$

Se observă că $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n = 1,2,\ldots$ şi $X = \bigcup_1^\infty E_n$. Avem

$$\int_X f_n d\mu \ge \int_{E_n} f_n d\mu \ge c\int_{E_n} s d\mu,\ n = 1,2,\ldots$$

Aplicînd teorema X. 12,

$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} s d\mu = \int_X s d\mu$ şi deci $\alpha \ge c\int_X s d\mu$, $0 < c < 1$. Deducem $\alpha \ge \int_X s d\mu$ $\forall s \le f$, s simplă măsurabilă şi folosind definiţia integralei, $\alpha \ge \int_X f d\mu$. În definitiv $\alpha = \int_X f d\mu$ şi teorema este demonstrată.

OBSERVAŢIE. Forţa teoremei constă în faptul că s-a presupus că $f_n \to f$ **punctual** (şi nu uniform).

Teorema X. 14. Fie $f_n : X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, un şir de funcţii măsurabile. Definim $f(x) = \sum_n f_n(x)$, $x \in X$, $f : X \to [0,\infty]$. Atunci

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_X f_n d\mu \text{ sau } \int_X (\sum_n f_n) d\mu = \sum_n \int_X f_n d\mu.$$

DEMONSTRAŢIE. Să arătăm mai întîi că dacă f_1, $f_2 : X \to [0,\infty]$ sunt măsurabile, atunci

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

În adevăr, fie (conform teoremei X. 8) şiruri de funcţii simple măsurabile $(s_n)_n$, $(t_n)_n$ crescătoare astfel încît $s_n \nearrow f_1$, $t_n \nearrow f_2$. Atunci $s_n + t_n \nearrow f_1 + f_2$ şi

$$\int_X (s_n + t_n) d\mu = \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicînd teorema X. 13, obţinem

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

Trecînd la demonstraţia propriu-zisă, şirul sumelor parţiale $s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$ este crescător către f şi

$$\int_X s_n d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int_X f_k d\mu$$

şi se aplică încă o dată teorema X. 13.

TEOREMA X. 15. (lema lui L. P. J. FATOU, 1878 –1929). Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii măsurabile $f_n : X \to [0,\infty]$. Atunci

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu \le \liminf \int_X f_n d\mu.$$

DEMONSTRAŢIE. Punem $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$ pentru fiecare n. Avem $g_n \le f_n$ $\forall n$ şi $g_n \nearrow \liminf_{k\to\infty} f_k$ (g_n tinde crescător). Folosind teorema de convergenţă monotonă,

$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X (\liminf f_n) d\mu$ şi lema lui Fatou rezultă.

Definiţia X. 14. Definim

$$L_X^1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ măsurabilă şi } \int_X |f| d\mu < +\infty\}$$

şi numim funcţiile din $L_X^1(\mu)$ **integrabile** (în sensul Lebesgue) pe X.

EXEMPLU. Dacă $\mu(X) < +\infty$, orice funcţie măsurabilă şi mărginită este integrabilă.

Fie $h : X \to \mathbb{R}$. Definim $h^+ = \max\{h,0\}$ şi $h^- = -\min\{h,0\}$. Este evident că dacă h este măsurabilă, atunci h^+ şi h^- sunt măsurabile. Avem $h = h^+ - h^-$ şi $|h| = h^+ + h^-$ ($h^+,h^- : X \to [0,\infty)$).

Definiţia X. 15. Fie $f \in L_X^1(\mu)$, $f = u + iv$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$. Definim **integrala lui f pe X** prin: $\int_X f d\mu = \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i\int_X v^+ d\mu - i\int_X v^- d\mu$. Deci $\int_X f d\mu \in \mathbb{C}$. Se verifică uşor că $\int_X u^+ d\mu$, $\int_X u^- d\mu$, $\int_X v^+ d\mu$, $\int_X v^- d\mu$ sunt **numere** reale (finite), din condiţia $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

TEOREMA X. 16. (liniaritatea integralei). Dacă $f,g \in L_X^1(\mu)$ şi $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, atunci $\alpha f + \beta g \in L_X^1(\mu)$ şi $\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$, deci $L_X^1(\mu)$ este un $\mathbb{C}$ – spaţiu vectorial şi aplicaţia $f \mapsto \int_X f d\mu$ este $\mathbb{C}$ – liniară.

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra doar cazul $\alpha = \beta = 1$ şi f,g cu valori reale, cazul general deducîndu-se apoi cu uşurinţă (vezi şi teorema X. 11). Fie $h = f + g$. Avem $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ sau $h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$. Deducem (teorema X. 14)

$$\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu$$

şi regrupînd termenii,

$$\int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu;$$

conform definiţiei,

$$\int_X h\, d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu .$$

OBSERVAŢIE. Se arată uşor că dacă $f \in L_X^1(\mu)$, atunci

$$|f| \in L_X^1(\mu) \text{ şi } \left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu .$$

TEOREMA X. 17. (teorema lui Lebesgue de **convergenţă dominată**). Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii măsurabile $f_n : X \to \mathbb{C}$ astfel încît să existe $g \in L_X^1(\mu)$ cu $|f_n(x)| \le g(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in X$ şi $f_n \to f$ punctual. Atunci $f \in L_X^1(\mu)$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu .$$

DEMONSTRAŢIE. Funcţia f este măsurabilă ca limită de funcţii măsurabile şi cum $|f| \le g$, rezultă că $f \in L_X^1(\mu)$. Mai mult, din $|f_n - f| \le 2g$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, şirului $2g - |f_n - f|$ i se poate aplica lema lui Fatou. Obţinem

$$\int_X 2g\, d\mu \le \liminf \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X 2g\, d\mu - \limsup \int_X |f_n|\, d\mu .$$

Dar $\int_X 2g\, d\mu \in \mathbb{R}$ şi deci $\limsup \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$, de unde rezultă $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$. Dar

$$\left|\int_X (f_n - f) d\mu\right| \le \int_X |f_n - f|\, d\mu$$

de unde concluzia

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu .$$

OBSERVAŢIE. Forţa teoremei constă în faptul că $f_n \to f$ punctual (şi nu uniform).

Vom da o aplicaţie a acestei teoreme la continuitatea integralei Lebesgue cu parametru:

TEOREMA X. 18. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nevid în $\mathbb{R}$ şi $f : X \times I \to \mathbb{R}$ astfel încît:
i) funcţia $x \mapsto f(x,t)$ este măsurabilă, $\forall\, t \in I$;
ii) există $g : X \to \mathbb{R}$, $g \in L_X^1(\mu)$ astfel încît $|f(x,t)| \le g(x)$, $\forall\, t \in I$, $x \in X$;
iii) aplicaţia $t \mapsto f(x,t)$ este continuă, $\forall\, x \in X$.
Atunci funcţia $F : I \to \mathbb{R}$ definită de

$$F(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x)$$

este continuă pe I (am scris $d\mu(x)$ pentru a accentua că măsura este pe X).

DEMONSTRAŢIE. F este corect definită (condiţia ii). Luăm $\forall\, a \in I$ şi $(t_n)_n$ un şir

în I, $t_n \to a$. Atunci $f(x,t_n) \to f(x,a)$ pentru orice $x \in X$ (conform iii). Putem aplica teorema de convergenţă dominată şi rezultă că

$$F(t_n) = \int_X f(x,t_n)\,d\mu \to \int_X f(x,a)\,d\mu = F(a).$$

De aici rezultă continuitatea lui F în a.

Definiţia X. 16. O proprietate $\mathcal{P}$ despre punctele unui spaţiu cu măsură $(X,\mathcal{A},\mu)$ are loc **aproape peste tot** (a.p.t.) dacă există $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ şi $\mathcal{P}$ este adevărată pe $X - A$.

EXEMPLU. Dacă $f,g : X \to \mathbb{C}$ sunt măsurabile, rezultă că $f = g$ a.p.t. dacă $\mu\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} = 0$. Relaţia $f = g$ a.p.t. este o relaţie de echivalenţă şi dacă $f,g \in L_X^1(\mu)$ şi $f = g$ a.p.t., atunci $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

OBSERVAŢIE. Fie $f : X \to [0,\infty]$ măsurabilă şi $\int_X f\,d\mu = 0$. Atunci $f = 0$ a.p.t. (În adevăr, dacă $A_n = \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$, $n = 1,2,\ldots$, atunci rezultă

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$$

deci $\mu(A_n) = 0$, iar $\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_n A_n$).

4. 10 exerciţii

1. Fie X o mulţime şi $A \subset X$. Să se determine σ – algebra şi topologia generate de $\{A\}$.

2. Fie $\mathcal{A}$ o σ – algebră pe X şi $(A_n)_n$ un şir în $\mathcal{A}$. Să se arate că există un şir $(B_n)_n$ în $\mathcal{A}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$, $n \neq m$ astfel încît $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$.

3. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic. Mulţimile care sunt reuniuni numărabile de inchişi se zic de tip F_σ, iar mulţimile intersecţii numărabile de deschişi se zic de tip G_δ. Să se arate că mulţimile de tip F_σ sau G_δ sunt boreliene şi că un interval semideschis $[a,b) \subset \mathbb{R}$ este atît F_σ cît şi G_δ.

4. Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură. Să se arate că pentru orice şir $(A_n)_n$ în $\mathcal{A}$

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

5. Fie $(X,\mathcal{P}(X),\delta_a)$ cîmpul de probabilitate cu $a \in X$ şi δ_a măsura Dirac concentrată în a. Să se determine mulţimea $L_X^1(\delta_a)$ şi pentru $f \in L_X^1(\delta_a)$ să se calculeze $\int_X f\,d\delta_a$.

6. Fie $(\mathbb{N},\mathcal{P}(X),\mu)$ unde μ este măsura de numărare. Să se determine $L_X^1(\mu)$ şi pentru $f \in L_X^1(\mu)$ să se calculeze $\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu$.

7. Fie $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ un şir dublu (indexat cu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), $a_{m,n} \geq 0$ pentru orice m,n. Folosind exerciţiul precedent şi teorema de convergenţă monotonă, să se arate că

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

8. Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f : X \to (0,\infty]$ măsurabilă. Să se arate că funcţia $\varphi : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, $\varphi(E) = \int_E f\,d\mu$ este o măsură pe $\mathcal{A}$ şi pentru orice $g : X \to [0,\infty]$ măsurabilă $\int_X g\,d\varphi = \int_X gf\,d\mu$.

9. Să se arate că $f \in L_X^1(\mu) \Rightarrow |f| \in L_X^1(\mu)$ şi $|\int_X f\,d\mu| \leq \int_X |f|\,d\mu$.

10. Să se dea un exemplu în care în lema lui Fatou să avem inegalitate strictă.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. σ – algebra este $\{\emptyset, A, X - A, X\}$ iar topologia $\{\emptyset, A, X\}$.

2. Se pune $B_0 = A_0$, $B_n = A_n - (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ $n > 0$ etc.

3. $[a,b) = \bigcup_{n \geq 1}[a, b - \frac{1}{n}] = \bigcap_n (a - \frac{1}{n}, b)$.

4. Folosind exerciţiul 2, $\bigcup B_n = \bigcup A_n$, $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$, $\forall\, n$, etc.

5. Este imediat de arătat că $L^1_X(\delta_a) = \{f : X \to \mathbb{C}\}$ şi $\int_X f \mathrm{d}\delta_a = f(a)$. Deci integrala în raport cu măsura Dirac concentrată în punctul a este "evaluarea" în a.

6. $L^1_{\mathbb{N}}(\mu) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}; \sum_n |f(n)| < \infty\}$ sau în definitiv mulţimea şirurilor $(a_n)_n$ în $\mathbb{C}$ astfel încît $\sum_n |a_n| < \infty$ (se notează de obicei $L^1_{\mathbb{N}}(\delta) = l^1_{\mathbb{N}}$). Se arată că $\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu = \sum_n |f(n)|$.

Pentru demonstraţie se consideră cazul funcţiilor pozitive (deci reale şi ≥ 0) $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$. Se consideră un şir de funcţii simple de forma

$$s_n(m) = \begin{cases} f(m) & m \leq n \\ 0 & m > n \end{cases}.$$

Se arată că $s_n \nearrow f$ şi se foloseşte teorema de convergenţă monotonă. Cazul general se reduce imediat la cazul funcţiilor pozitive despărţind în parte reală, parte imaginară şi funcţiile cu valori reale h în $h^+ - h^-$ etc.

7. Se foloseşte exerciţiul precedent şi teorema de convergenţă monotonă (desigur şi demonstraţii elementare, fără teoria măsurii, pot fi date).

8. Pentru $A = \cup A_n$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$, $\chi_A \cdot f = \sum \chi_{A_n} f$ şi se integrează termen cu termen etc. Pentru $\int_X g \,\mathrm{d}\varphi = \int_X gf \mathrm{d}\mu$ se porneşte cu g funcţie caracteristică, se trece apoi la funcţii simple, apoi la funcţii măsurabile pozitive cu teorema de convergenţă monotonă etc.

9. f măsurabilă $\Rightarrow |f|$ măsurabilă căci $|\ | : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ este o funcţie continuă etc.

10. Luăm $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X), \mu)$, μ măsura de numărare şi $A = \{0\}$, $\mu(A) = 1$. Punem

$$f_n = \begin{cases} \chi_A & n \text{ par} \\ 1 - \chi_A & n \text{ impar} \end{cases}, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n = 0, \quad \int_{\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ \infty & n \text{ impar} \end{cases} \text{ etc.}$$

LECŢIA A XI-A

MĂSURA LEBESGUE ÎN $\mathbb{R}^k$. SPAŢII L^p

INTRODUCERE

Vom prezenta în această lecţie construcţia măsurii Lebesgue în $\mathbb{R}^k$, extinzînd intuiţiile noastre relativ la arii plane, volume în spaţiu, lungimi, hipervolume, etc. Totodată rezultă, în mod natural, o teorie a integrării anumitor funcţii pe anumite mulţimi din $\mathbb{R}^k$. Vom încheia cu o descriere succintă a spaţiilor L^p, importante în Analiză, dar şi ca prototip al unor spaţii de funcţii interesîndu-l pe inginer (de exemplu $L^2_{[a,b]}$ este spaţiul semnalelor de energie finită restrînse la intervalul de timp $[a,b]$).

1. Măsura Lebesgue în $\mathbb{R}^k$

Din mai multe moduri de construcţie a măsurii Lebesgue în $\mathbb{R}^k$, am ales pe cel ce pare mai intuitiv. Ideea de bază este construcţia treptată a măsurii prin "aproximare": se porneşte de la mulţimi "simple" şi se aproximează mulţimile "complicate" cu mulţimi simple.

Să notăm $\prec$ pentru $\leq$ sau $<$. Un **paralelipiped în $\mathbb{R}^k$** este o mulţime de forma $P = \{x = (x_1,\ldots,x_k) \mid a_i \prec x_i \prec b_i,\ i = 1,\ldots,k,\ a_i \leq b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$. În definitiv un paralelipiped este un produs cartezian de intervale mărginite. Dacă toate inegalităţile sînt **stricte** paralelipipedul se zice **deschis** (el este o mulţime **deschisă** în $\mathbb{R}^k$) iar dacă toate inegalităţile sunt $\leq$, paralelipipedul este **închis** (evident este o mulţime **compactă** în $\mathbb{R}^k$). Să observăm că mulţimea vidă este un paralelipiped. Pentru cazurile $k = 1,2$ denumirea de paralelipiped pare forţată, dar se urmăreşte o terminologie unitară.

Definiţia XI. 1. Dacă P este un paralelipiped în $\mathbb{R}^k$, ca mai sus, se defineşte **măsura** sa prin

$$\mu(P) = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i).$$

Să observăm că mulţimea vidă are măsura 0 (zero) şi aceeaşi măsură o au mulţimile reduse la un punct. Pentru $k = 1$ măsura este **lungimea** intervalului, pentru $k = 2$ **aria dreptunghiului** iar pentru $k = 3$ **volumul paralelipipedului** (pentru $k = 1$ paralelipipedele sunt intervale, pentru $k = 2$ dreptunghiuri, etc.).

OBSERVAŢIE. Se arată cu uşurinţă că dacă $P = P_1 \cup ... \cup P_n$ disjuncte două cîte două, atunci $\mu(P) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)$. In ceea ce urmează, vom întîlni de mai multe ori afirmaţii ce par evidente intuitiv dar care necesită demonstraţie (uneori laborioasă). În general nu vom intra în detalii dar este important şi util ca însuşi cititorul să încerce să "formalizeze" aceste intuiţii "evidente".

Definiţia XI. 2. Se numeşte mulţime **elementară** în $\mathbb{R}^k$ orice mulţime care este reuniune **finită** de paralelipipede disjuncte două cîte două. Vom nota cu $\mathcal{E}$ clasa mulţimilor elementare în $\mathbb{R}^k$. Deci $A \in \mathcal{E}$ dacă $A = P_1 \cup ... \cup P_n$ cu P_i paralelipipede astfel încît $i \neq j$ să implice $P_i \cap P_j = \emptyset$.
Pentru o mulţime elementară A, definim **măsura** ei ca

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\text{, unde } A = P_1 \cup ... \cup P_n,$$

paralelipipedele fiind disjuncte două cîte două. Pentru ca definiţia măsurii mulţimilor elementare să fie **corectă**, se arată fără dificultate că dacă $A = P_1 \cup ... \cup P_n = P'_1 \cup ... \cup P'_m$ (două descompuneri în paralelipipede disjuncte două cîte două), atunci

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(P'_j).$$

OBSERVAŢIE. Orice paralelipiped este mulţime elementară şi măsura sa ca paralelipiped coincide cu măsura sa ca mulţime elementară. În continuare să observăm că dacă $A,B \in \mathcal{E}$ atunci $A \cup B$, $A - B$, $A \cap B \in \mathcal{E}$ şi pentru orice $A \in \mathcal{E}$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $F,G \in \mathcal{E}$, F închisă şi G deschisă, astfel încît

$$F \subset A \subset G \text{ şi } \mu(G) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$$

(ultima proprietate mai poartă numele de **regularitate**). Desigur orice mulţime elementară este mărginită şi în proprietatea de regularitate, F este chiar compactă. În acest mod s-a efectuat o primă extensie: de la măsurarea paralelipipedelor s-a trecut la măsurarea mulţimilor elementare, pe care le putem gîndi ca fiind "construite" din paralelipipede. Funcţia $\mu : \mathcal{E} \to [0,\infty)$ are proprietatea de **finit aditivitate** şi de **finit subaditivitate**, adică:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

dacă $A_1,..,A_n \in \mathcal{E}$ sunt disjuncte două cîte două şi

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{m} B_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \text{ pentru orice } B_1,...,B_n \in \mathcal{E}.$$

Următorul pas în construcţia măsurii Lebesgue este mai puţin intuitiv şi înseamnă construcţia unei măsuri exterioare pe $\mathbb{R}^k$. În general, se numeşte **măsură exterioară** pe o mulţime X orice funcţie $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ cu $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ dacă $A \subset B$ şi μ^* **numărabil subaditivă** (adică

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{1}^{\infty} \mu^*(A_n),$$

pentru orice şir $(A_n)_n$ de părţi ale lui X).

Definiţia XI. 3. Pentru orice $E \subset \mathbb{R}^k$, definim $\mu^*(E) = \inf_n \sum_{1}^{\infty} \mu(A_n)$ unde inf se ia după toate şirurile $(A_n)_n$ de mulţimi elementare deschise astfel încît $E \subset \bigcup_{1}^{\infty} A_n$. Intuitiv se "aproximează" dinspre exterior mulţimile cu reuniuni numărabile de mulţimi elementare deschise. Este limpede că în definiţie se pot folosi doar paralelipipede deschise.

TEOREMA XI. 1. μ^* este o măsură exterioară pe $\mathbb{R}^k$ şi $\mu^*|_{\mathcal{E}} = \mu$.

DEMONSTRAŢIE. Este clar că $\mu^*(E) \in [0,\infty]$, $\forall E \subset \mathbb{R}^k$ şi că $\mu^*(\emptyset) = 0$. Se observă că $E_1 \subset E_2$ implică $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$. Pentru a arăta numărabil subaditivitatea, fie $E = \bigcup_n E_n$. Dacă există n cu $\mu^*(E_n) = \infty$ nu este nimic de demonstrat aşa că putem presupune $\mu^*(E_n) < \infty$, $\forall n$. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare n există un şir $(A_{np})_p$ cu $E_n \subset \bigcup_p A_{np}$, A_{np} elementare deschise şi

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu(A_{np}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ (proprietatea marginii inferioare).}$$

Atunci $(A_{np})_{n,p}$ este o familie numărabilă de mulţimi elementare deschise $E \subset \bigcup_{n,p} A_{np}$ şi avem

$$\mu^*(E) \leq \sum_n \sum_p \mu(A_{np}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E)_n) + \varepsilon\ ;$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deducem

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n-1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Pentru a arăta că $\mu^*|_{\mathcal{E}} = \mu$, luăm $A \in \mathcal{E}$. $\forall \varepsilon > 0$, rezultă din proprietatea

de regularitate că există G deschisă, $G \in \mathscr{E}$ cu $\mu(G) \le \mu(A) + \varepsilon$, $G \supset A$. Deci este evident că $\mu^*(A) \le \mu(G) \le \mu(A) + \varepsilon$, de unde cum ε era arbitrar, $\mu^*(A) \le \mu(A)$. Pentru a dovedi inegalitatea contrară se consideră pentru $\varepsilon > 0$ şi $A \subset \bigcup A_n$, A_n deschişi elementari astfel încît $\sum_1^\infty \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$. Din regularitate găsim un compact elementar F cu $\mu(F) \ge \mu(A) - \varepsilon$, $F \subset A$. Cum F este compact; $F \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$ cu N convenabil şi deci

$$\mu(A) \le \mu(F) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) + \varepsilon \le \mu^*(A) + 2\varepsilon .$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă că $\mu(A) \le \mu^*(A)$.

Al treilea pas în construcţie este de a pune în evidenţă o σ – **algebră** "cît mai mare" pe care μ^* să fie o măsură (deci numărabil aditivă). Acest lucru se poate face prin următorul procedeu de "aproximaţie":

Pentru $A,B \subset \mathbb{R}^k$, notăm $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, **diferenţa simetrică** a mulţimilor A şi B şi scriem $A_n \to A$ dacă $\mu^*(A_n \Delta A) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pentru $(A_n)_n$ şir de părţi în $\mathbb{R}^k$. Se defineşte

$$\mathscr{M}_f(\mu) = \{A \subset \mathbb{R}^k \mid \exists\, (A_n)_n, A_n \in \mathscr{E}, \forall\, n \text{ şi } A_n \to A\}$$

$$\mathscr{M}(\mu) = \{E \subset \mathbb{R}^k \mid E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,, E_n \in \mathscr{M}_f(\mu)\}.$$

Rezultatul fundamental este:

TEOREMA XI. 2. $\mathscr{M}(\mu)$ este o σ – **algebră** pe $\mathbb{R}^k$ şi $\mu^*|_{\mathscr{M}(\mu)}$ este o **măsură** (numită **măsura Lebesgue** pe $\mathbb{R}^k$).

DEMONSTRAŢIE. Se arată că dacă $A_n \to A$, $B_n \to B$ atunci $A_n \cup B_n \to A \cup B$, $A_n \cap B_n \to A \cap B$, $A_n - B_n \to A - B$ (exerciţiul 1). Deci $A,B \in \mathscr{M}_f(\mu)$ implică $A \cup B, A \cap B, A - B$ în $\mathscr{M}_f(\mu)$ (căci clasa mulţimilor elementare $\mathscr{E}$ este închisă la reuniuni finite, intersecţii finite şi diferenţe de mulţimi). Mai mult, dacă $A \in \mathscr{M}_f(\mu)$ atunci $\mu^*(A) < \infty$. În adevăr, $|\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \le \mu^*(A_n \Delta A)$ (exerciţiul 2) de unde $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$ şi deci $\mu^*(A) < \infty$ dacă $\mu^*(A_n \Delta A) \to 0$. Să observăm că dacă $A_n, B_n \in \mathscr{E}$ avem

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)$$

căci μ este finit aditivă pe $\mathscr{E}$ şi $A_n \cup B_n = A_n \cup (B_n - A_n)$ iar $B_n = (A_n \cap B_n) \cup (B_n - A_n)$.
Luînd $A_n \to A$ şi $B_n \to B$, obţinem

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)\,,$$

pentru orice $A,B \in \mathscr{M}_f(\mu)$; în particular dacă $A \cap B = \emptyset$, cum $\mu^*(\emptyset) = 0$,

deducem că μ^* este finit aditivă pe $\mathscr{M}_f(\mu)$.

Fie $A \in \mathscr{M}(\mu)$, $A = \bigcup_1^\infty A_n$ cu $A_n \in \mathscr{M}_f(\mu)$. Putem presupune A_n disjuncte două cîte două (căci $\mathscr{M}_f(\mu)$ este "închis" la reuniuni finite şi diferenţe).

$$A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n \;\Rightarrow\; \mu^*(A) \ge \mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \ldots + \mu^*(A_n)$$

deci, în definitiv, $\mu^*(A) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Dar din subaditivitate avem şi

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \text{ deci } \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

dacă $A \in \mathscr{M}(\mu)$ şi $A_n \in \mathscr{M}_f(\mu)$, $\forall n$, disjuncte două cîte două.
Se poate arăta că $A \in \mathscr{M}_f(\mu)$ dacă şi numai dacă $A \in \mathscr{M}(\mu)$ şi $\mu^*(A) < \infty$ (ceea ce justifică notaţia $\mathscr{M}_f(\mu)$; cu indicele f de la **finit**).

În adevăr, o implicaţie este banală, iar dacă $A = \bigcup_1^\infty A_n$ $\mu^*(A) < \infty$ ca mai sus, se poate arăta uşor că notînd $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $B_n \in \mathscr{M}_f(\mu)$ şi $B_n \to A$, de unde cum fiecare B_n este "limita" unui şir de mulţimi elementare, deducem că A este limita unui şir de mulţimi elementare şi deci $A \in \mathscr{M}_f(\mu)$.

Fie acum $A = \bigcup_1^\infty A_n$, $A_n \in \mathscr{M}(\mu)$, disjuncte două cîte două. Sunt două posibilităţi: sau există $n \in \mathbb{N}$ cu $\mu^*(A_n) = +\infty$, caz în care în mod evident $\mu^*(A) = \sum_n \mu^*(A_n)$, sau pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mu^*(A_n) < +\infty$, caz în care egalitatea $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ a fost demonstrată mai sus.

În definitiv, μ^* este **numărabil aditivă** pe $\mathscr{M}(\mu)$.
Verificarea faptului că $\mathscr{M}(\mu)$ este o σ - algebră nu prezintă nici o dificultate. În adevăr, $\emptyset \in \mathscr{M}(\mu)$, iar $\mathbb{R}^k$ este reuniune numărabilă de paralelipipede deschise. Este clar din definiţia lui $\mathscr{M}(\mu)$ că reuniuni numărabile de mulţimi din $\mathscr{M}(\mu)$ se află în $\mathscr{M}(\mu)$. Dacă $A \in \mathscr{M}(\mu)$ scriem $A = \bigcup_1^\infty A_n$ cu $A_n \in \mathscr{M}_f(\mu)$ şi scriem $\mathbb{R}^k = \bigcup_1^\infty P_n$, cu P_n paralelipipede, $\mathbb{R}^k - A = \bigcup_1^\infty (P_n - A)$ şi $P_n - A \in \mathscr{M}_f(\mu)$ etc.

Vom pune în evidenţă proprietăţile fundamentale ale măsurii Lebesgue mai sus construite, proprietăţi deseori utilizate în aplicaţii. Nu vom insista asupra demonstraţiilor amănunţite ale acestor rezultate. Vom nota $\mu^*|_{\mathscr{M}(\mu)}$ prin μ, iar mulţimile din $\mathscr{M}(\mu)$ vor fi numite mulţimi **măsurabile Lebesgue**.

1. Dacă A este o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^k$, atunci $A \in \mathcal{M}(\mu)$. În adevăr, mulţimile deschise sunt reuniuni numărabile de paralelipipede deschise. Rezultă că $\mathcal{M}(\mu)$ fiind o σ – algebră, ea conţine toate mulţimile **boreliene** ale lui $\mathbb{R}^k$ (cea mai mică σ - algebră generată de deschişii lui $\mathbb{R}^k$). În particular, mulţimile închise sunt măsurabile Lebesgue. Mai mult, pentru orice mulţime compactă $K \subset \mathbb{R}^p$, $\mu(K) < +\infty$.

2. Dacă $A \in \mathcal{M}(\mu)$, atunci $\forall \varepsilon > 0$ există o mulţime închisă F şi o mulţime deschisă G, $F \subset A \subset G$ astfel încît $\mu(G - A) < \varepsilon$, $\mu(A - F) < \varepsilon$ (**regularitate**). În adevăr, pentru G folosim definiţia măsurii (exterioare) şi pentru F prin trecere la complementară. Mai mult avem:

3. Pentru orice $A \in \mathcal{M}(\mu)$, $\mu(A) = \inf_G\{\mu(G) \mid G \supset A,\ G \text{ deschisă}\}$ şi

$$\mu(A) = \sup_K\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ mulţime compactă}\}.$$

Pentru ultima proprietate observăm că $\mathbb{R}^k = \bigcup_n K_n$ cu K_n compacte.

Deci pentru orice mulţime închisă F, avem $F = \bigcup_n (K_n \cap F)$ şi $K_n \cap F$ sunt **compacte**. Şirul $F_n = (K_1 \cup \ldots \cup K_n) \cap F$ este un şir crescător de mulţimi compacte şi $F = \bigcup_n F_n$. Din proprietăţile generale ale măsurii (lecţia a X – a), deducem $\lim_{n \to \infty} \mu(F_n) = \mu(F)$. Deci măsura mulţimilor închise se poate aproxima cu măsura mulţimilor compacte conţinute. Folosind proprietatea 2 (aproximarea cu mulţimi incluse), deducem

$$\mu(A) = \sup_K\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ mulţime compactă}\}.$$

4. Dacă $E \subset A, A \in \mathcal{M}(\mu)$ şi $\mu(A) = 0$ atunci $E \in \mathcal{M}(\mu)$ şi $\mu(E) = 0$ (se mai spune că măsura Lebesgue este **completă**).

Este suficient să arătăm că dacă $E \subset \mathbb{R}^k$ şi $\mu^*(E) = 0$ atunci $E \in \mathcal{M}(\mu)$. Pentru aceasta, fie $(A_n)_n$ un şir de mulţimi elementare astfel încît seria $\sum \mu(A_n)$ să conveargă. Avem

$$\mu^*(A_n \Delta E) = \mu^*((A_n - E) \cup (E - A_n)) \le \mu^*(A_n) + \mu^*(E) = \mu^*(A_n)$$

deci $\mu^*(A_n \Delta E) \to 0$, dacă $E \in \mathcal{M}(\mu)$.

5. Pentru $A \subset \mathbb{R}^k$ şi $x \in \mathbb{R}^k$ definim $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$. Măsura Lebesgue are proprietatea de a fi **invariantă** la translaţii, în sensul că dacă $A \in \mathcal{M}(\mu)$ şi $x \in \mathbb{R}^k$, atunci $A + x \in \mathcal{M}(\mu)$ şi $\mu(A) = \mu(A + x)$.

Demonstraţia începe cu A paralelipiped (unde proprietatea este clară) şi apoi se extinde la mulţimile generale din $\mathcal{M}(\mu)$.

Comentariu. Mulţimile utilizate curent din $\mathbb{R}^k$ sunt măsurabile Lebesgue şi este destul de dificil de a da un exemplu de mulţime nemăsurabilă. Pentru aceasta trimitem la exerciţiul 3.

Vom numi integrala în raport cu măsura Lebesgue, **integrala Lebesgue**.

Să observăm că pentru orice $X \subset \mathbb{R}^k$ cu proprietatea $X \in \mathcal{M}(\mu)$ putem considera σ – algebra pe X notată $\mathcal{M}_X(\mu)$, formată din mulţimile $A \in \mathcal{M}(\mu)$ cu $A \subset X$. În mod evident, $(X, \mathcal{M}_X(\mu), \mu|_{\mathcal{M}X(\mu)})$ este un spaţiu cu măsură. În particular, pentru orice mulţime compactă $X \subset \mathbb{R}^k$, $(X, \mathcal{M}_X(\mu), \mu|_{\mathcal{M}X(\mu)})$ este un spaţiu cu măsură **finită**. În particular, orice funcţie măsurabilă şi mărginită pe un compact $X \subset \mathbb{R}^k$ este integrabilă (deci în L^1) în raport cu măsura Lebesgue. În consecinţă, orice funcţie continuă pe un compact din $\mathbb{R}^k$ este integrabilă.

În cazul particular $k = 1$ şi $X = [a,b]$, avem două "integrale" – integrala Riemann şi integrala Lebesgue. Are loc

TEOREMA XI. 3. Dacă f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Lebesgue pe $[a,b]$ şi integralele coincid.

Dacă notăm integrala Riemann, pentru moment, cu $R\int_a^b f dx$ iar integrala Lebesgue $\int_{[a,b]} f d\mu$ cu $\int_a^b f dx$, avem de arătat că $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ implică $f \in L^1_{[a,b]}(\mu)$ şi $R\int_a^b f dx = \int_a^b f dx$.

DEMONSTRAŢIE. Fie deci $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ şi $(\nu_k)_k$ un şir de diviziuni astfel încît ν_{k+1} rafinează ν_k pentru orice k, **normele tinzînd la 0**. Dacă ν_k este $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, se definesc funcţiile S_k şi s_k astfel:

$$S_k(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ M_i, & x \in (x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}; \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$s_k(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ m_i, & x \in (x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}; \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

În mod clar, $S(v_k,f) = \int_a^b S_k \mathrm{d}x$, $s(v_k,f) = \int_a^b s_k \mathrm{d}x$ (notaţiile de la lecţia a VIII–a) şi $S_1(x) \geq S_2(x) \geq \ldots \geq f(x) \geq \ldots \geq s_2(x) \geq s_1(x)$, $x \in [a,b]$. Să notăm $S(x) = \lim_{k\to\infty} S_k(x)$ şi $s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x)$ pentru $x \in [a,b]$. Din faptul că $f \in \Re_{[a,b]}$, $S(v_k,f) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} R\int_a^b f\mathrm{d}x$, $s(v_k,f) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} R\int_a^b f\mathrm{d}x$. Aplicînd teorema de convergenţă dominantă (lecţia a X–a)

$$\int_a^b S_k \mathrm{d}x \to \int_a^b S\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \int_a^b s_k \mathrm{d}x \to \int_a^b s\,\mathrm{d}x$$

deci în definitiv

$$\int_a^b S\,\mathrm{d}x = \int_a^b s\,\mathrm{d}x = R\int_a^b f\mathrm{d}x .$$

Deducem $S = s$ **a.p.t.** şi cum $s(x) \leq f(x) \leq S(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$, rezultă $s = f = S$ **a.p.t.** S şi s fiind măsurabile, deducem că f este măsurabilă şi

$$\int_a^b f\mathrm{d}x = \int_a^b S\,\mathrm{d}x = \int_a^b s\,\mathrm{d}x = R\int_a^b \mathrm{d}x ,$$

ceea ce termină demonstraţia.

Pentru a vedea că integrala Lebesgue este efectiv mai generală decît integrala Riemann să considerăm următorul exemplu.

EXEMPLUL 1. Să considerăm pe $[a,b]$, $a < b$ funcţia $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ iraţional} \\ 1, & x \text{ raţional} \end{cases}$.

Este clar că f este măsurabilă pe $[a,b]$ (este funcţia caracteristică a unei mulţimi numărabile deci măsurabile Lebesgue). Măsura intervalului $[a,b]$ este finită $(b - a)$ şi f măsurabilă şi mărginită. Deci $f \in L^1_{[a,b]}(\mu)$ (este deci integrabilă Lebesgue!). Mai mult, cum măsura unei mulţimi numărabile este 0, deducem $\int_a^b f\mathrm{d}x = 0$ (integrala Lebesgue). Se ştie însă că f nu este integrabilă Riemann (fiind discontinuă în orice punct).

Comentariu. Se poate arăta că dacă o funcţie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ este local integrabilă (în sens Riemann) şi integrala (Riemann) improprie $\int_a^b f\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, atunci $f \in L^1_{[a,b)}$, în raport cu măsura Lebesgue. O oarecare neconcordanţă în acest tip de rezultate o aduc integralele improprii care nu sunt absolut convergente (exemplu tipic: $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$). Din definiţia integralei Lebesgue rezultă că integrabilitatea Lebesgue este o "absolut" integrabilitate şi deci funcţia $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pe $[0,\infty)$ nu este integrabilă Lebesgue.

Pentru "calculul" integralelor Lebesgue în spiritul formulei Leibniz – Newton există rezultate deosebit de frumoase dar a căror demonstraţie depăşeşte cadrul acestei cărţi. Ne vom limita la a enunţa două rezultate în acest sens (fără demonstraţie). Pentru a preciza notaţia vom folosi $\int_a^b f dt$ pentru integrala Lebesgue pe $[a,b]$ (dt fiind notaţia pentru măsura $\mathrm{d}\mu$).

TEOREMA XI. 4. Dacă f este **integrabilă Lebesgue** pe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, atunci funcţia $F(x) = \int_a^x f dt$ este derivabilă aproape peste tot pe $[a,b]$ şi $F'(x) = f(x)$ aproape peste tot.

O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se zice **absolut continuă** pe $[a,b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice mulţime de intervale disjuncte două cîte două (a_k,b_k), $k = 1,\ldots,n$ satisfăcînd condiţia $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, să rezulte $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Un exemplu important de funcţie absolut continuă îl constituie funcţia $F(x) = \int_a^x f dt$ pentru f integrabilă Lebesgue pe $[a,b]$.

TEOREMA XI. 5. Dacă $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ este absolut continuă, atunci G este derivabilă a.p.t, $G' = g$ este integrabilă Lebesgue pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b g\,dt = G(b) - G(a).$$

OBSERVAŢIE. Deşi g este definită a.p.t., sensul integrabilităţii sale este următorul: se prelungeşte g la $[a,b]$ cu valoarea 0 în punctele în care nu este definită şi funcţia astfel obţinută este integrabilă Lebesgue etc.

2. Teorema lui Fubini. Schimbarea de variabilă

Fie $(\mathbb{R}^k,\mathcal{M}(\mu),\mu)$, $(\mathbb{R}^p,\mathcal{M}(\lambda),\lambda)$, $(\mathbb{R}^{k+p},\mathcal{M}(\nu),\nu)$, spaţiile $\mathbb{R}^k$ (respectiv $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{k+p}$) cu măsurile Lebesgue construite în paragraful precedent şi μ^*, λ^*, ν^* măsurile exterioare corespunzătoare. Vom identifica în mod natural $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ cu $\mathbb{R}^{k+p}$.

Să definim $(\mu^*\times\lambda^*)(E) = \inf\sum_i \mu^*(A_i)\lambda^*(B_i)$ pentru $E \subset \mathbb{R}^{k+p}$ şi inf este luat după toate şirurile $(A_i)_i$, $(B_i)_i$, $A_i \subset \mathbb{R}^k$, $B_i \subset \mathbb{R}^p$ $\forall\, i$, astfel încît $E \subset \bigcup_i A_i \times B_i$.

TEOREMA XI. 6. 1) $\mu^* \times \lambda^*$ este o **măsură exterioară** pe $\mathbb{R}^{k+p}$ şi $\mu^* \times \lambda^* = \nu^*$ (măsura exterioară pe $\mathbb{R}^{k+p}$ este **"produsul"** măsurilor exterioare pe $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^p$).
2) Dacă $A \in \mathcal{M}(\mu)$, $B \in \mathcal{M}(\lambda)$ atunci $A \times B \in \mathcal{M}(\nu)$ şi $\nu(A \times B) = \mu(A)\lambda(B)$.
Mai general teorema funcţionează şi pentru $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^p$, $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+p}$, cu măsurile Lebesgue incluse corespunzătoare. Vom nota pentru $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ şi $x \in X$, $f_x : Y \to \mathbb{C}$, dată de $f_x(y) = f(x,y)$.

TEOREMA XI. 7. (G. FUBINI, 1870-1943). a) Fie $f : \mathbb{R}^{p+k} \to [0,\infty)$ măsurabilă. Pentru aproape toate punctele $x \in \mathbb{R}^k$, f_x este măsurabilă pe $\mathbb{R}^p$ (măsura Lebesgue). Funcţia $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f_x\,d\lambda$ este măsurabilă pe $\mathbb{R}^k$ şi $\int_{\mathbb{R}^k}\varphi\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f\,d\nu$.
Desigur avem un rezultat analog schimbînd $\mathbb{R}^k$ cu $\mathbb{R}^p$.
b) Fie $f : \mathbb{R}^{k+p} \to \mathbb{C}$ măsurabilă şi $\varphi^*(x) = \int_{\mathbb{R}^p} |f|_x\,d\lambda$. Dacă $\int_{\mathbb{R}^p}\varphi^*\,d\mu < \infty$, atunci f este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}^{k+p}$.
c) Dacă f este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}^{k+p}$, atunci f_x este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}^p$ pentru aproape toate punctele $x \in \mathbb{R}^k$, $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f_x\,d\lambda$ definită aproape peste tot este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}^k$ şi avem

$$\int_{\mathbb{R}^k}\varphi\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f\,d\nu$$

sau

$$\int_{\mathbb{R}^k}\Big[\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,d\lambda(y)\Big]\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f(x,y)\,d\nu(x,y).$$

Desigur avem un rezultat analog schimbînd $\mathbb{R}^k$ cu $\mathbb{R}^p$ (x cu y).
Pentru simplitate, vom nota $d\mu = dx$, $d\lambda = dy$, $d\nu = dxdy$. Putem rescrie formula de la punctul c) astfel:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^k}\Big[\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\Big]dx = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^p}\Big[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx\Big]dy}$$

Prima şi a treia integrală se numesc integrale **iterate**.

Nu vom demonstra teorema XI. 7. Să remarcăm că punctul b) serveşte la a arăta că o funcţie **măsurabilă** pe $\mathbb{R}^{p+k}$ este integrabilă cu ajutorul calculului (mai simplu) al unei integrale iterate. Punctul c) permite calculul integralei unei funcţii **integrabile** pe $\mathbb{R}^{k+p}$ cu ajutorul unei integrale iterate. În acest mod se reduce în principiu, calculul integralelor "multiple" (pe $\mathbb{R}^n$) la calculul integralelor simple (pe $\mathbb{R}$).
Desigur se pot înlocui în teoremă $\mathbb{R}^k$ ($\mathbb{R}^p$) cu $X \subset \mathbb{R}^k$ ($Y \subset \mathbb{R}^p$) măsurabile şi $\mathbb{R}^{k+p}$ cu $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+p}$ şi rezultă că integralele multiple revin la succesiuni de integrale simple (pe intervale sau alte submulţimi ale lui $\mathbb{R}$).

Să aplicăm teorema lui Fubini la cîteva cazuri simple care intervin des în aplicaţii.

EXEMPLUL 2. Fie $[a,b]$, $[c,d]$ intervale compacte în $\mathbb{R}$ şi $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ continuă. Atunci f este integrabilă Lebesgue şi

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy$$

(pentru integrale în $\mathbb{R}^2$ se foloseşte notaţia $\iint$ şi integralele se numesc "duble").
Integrabilitatea lui f rezultă din faptul că este continuă (deci măsurabilă) şi astfel mărginită pe **compactul** $[a,b] \times [c,d]$. Egalitatea integralelor este o consecinţă directă a teoremei Fubini. O parte a acestui rezultat a fost demonstrată în lecţia a IX–a.
Fie mai general $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ cu $\varphi_1,\varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi_1 \le \varphi_2$ şi $f : K \to \mathbb{C}$ **continuă**. Atunci f este integrabilă pe K şi

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx .$$

În adevăr K este o mulţime compactă (Fig. XI. 1).

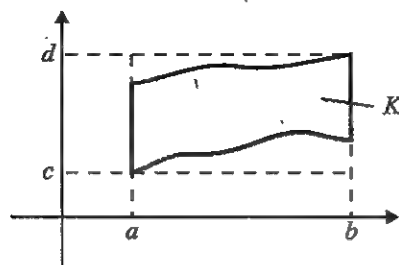


Fig. XI. 1.

Fie $[a,b] \times [c,d] \supset K$; prelungim funcţia f la $[a,b] \times [c,d]$ cu 0 în afara lui K şi aplicăm teorema Fubini funcţiei prelungite. În particular, dacă luăm $f \equiv 1$ pe K, obţinem că măsura mulţimii K ("aria" în plan) va fi

$$\text{aria}(K) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx ,$$

formulă cunoscută din liceu.

EXEMPLUL 3. Fie $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in A;\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$ unde $A \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime compactă, $\varphi_1,\varphi_2 : A \to \mathbb{R}$ sunt continue şi $\varphi_1 \le \varphi_2$. Fie $f : K \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă. Avem:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \Big(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \Big) dx\,dy$$

(pentru integrala în $\mathbb{R}^3$ se foloseşte notaţia $\iiint$ şi integralele se numesc "triple").

Demonstraţia se face luînd $K \subset A \times [a,b]$ şi aplicînd teorema Fubini.

Ca un caz particular măsura mulţimii K ("volum" în spaţiu) va fi

$$\text{vol}(K) = \iint_A (\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y))\,dx\,dy .$$

Vom încheia acest paragraf cu teorema de schimbare de variabilă, teoremă foarte utilă atît teoretic cît şi în calculul efectiv al integralelor.

TEOREMA XI. 8. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă (nevidă), $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1, injectivă şi cu jacobianul $J_\Phi(t) \neq 0$ pentru orice $t \in A$. Atunci

$\Phi(A) = B$ este deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi dacă $f : B \to \mathbb{C}$ este măsurabilă (măsura Lebesgue), atunci

i) $f \circ \Phi : A \to \mathbb{C}$ este măsurabilă;

ii) $f \in L^1_B \Leftrightarrow (f\circ\Phi)|J_\Phi| \in L^1_A$;

iii) Dacă $f \in L^1_B$, atunci

$$\int_B f(x)\,dx = \int_A (f\circ\Phi)(t)\,|J_\Phi(t)|\,dt$$

(dt, dx fiind măsura Lebesgue în $\mathbb{R}^n$).

Formula iii) este **formula de schimbare de variabilă**. În mod formal, dacă shimbarea de variabilă Φ este scrisă $x = \Phi(t)$, în integrală vom înlocui $f(x)$ cu $f(\Phi(t))$ şi dx cu $|J_\Phi(t)|dt$.

OBSERVAŢIE. Teorema se aplică cu modificări evidente pentru mulţimi măsurabile $M \subset A$ şi $\Phi(M) \subset B$.

Demonstraţia teoremei este laborioasă şi o vom omite.

EXEMPLUL 4. Fie $A = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0,\ -\pi < \theta < \pi\}$ şi $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $B = \mathbb{R}^2 - \{(x,0);\ x \le 0\}$. Deducem pentru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrabilă pe $\mathbb{R}^2$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

(coordonate polare).

3. Spaţii L^p

Două numere reale pozitive p,q formează o pereche de **exponenţi conjugaţi** dacă $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (deci $p,q > 1$). Prin convenţie se consideră $1,\infty$ ca pereche de **exponenţi conjugaţi**.

Inegalitatea lui Hölder. Fie $1 < p < \infty$, q conjugatul lui p şi $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură. Pentru orice $f,g : X \to [0,\infty]$ măsurabile avem

$$(*) \qquad \int_X fg\,d\mu \le \Big(\int_X f^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X g^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} .$$

În cazul $p = q = 2$ inegalitatea (*) se numeşte **inegalitatea lui Schwartz**. Pentru demonstraţie trimitem la exerciţiul 5.

Inegalitatea lui Minkowski. Fie $1 \le p < \infty$ şi $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f,g : X \to [0,\infty]$ măsurabile. Atunci

$$(**) \qquad \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pentru demonstraţie trimitem la exerciţiul 5.

Definiţia XI. 4. Fie $1 \le p < \infty$ şi $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură. Definim mulţimea $L_X^p(\mu)$ prin

$$L_X^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \text{măsurabilă}, \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}.$$

Se observă că pentru $p = 1$ regăsim mulţimea funcţiilor integrabile pe X.

Pentru $f \in L_X^p(\mu)$ notăm

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Să remarcăm că $\|f\|_p = 0$ înseamnă $f = 0$ a.p.t. Vom considera în $L_X^p(\mu)$ relaţia de echivalenţă $f \sim g$ dacă $f = g$ a.p.t. şi vom nota tot $L_X^p(\mu)$ mulţimea claselor de echivalenţă (în general nu este pericol de confuzie, se lucrează cu reprezentanţi dar este uşor de arătat că rezultatele depind doar de clasele de echivalenţă).

TEOREMA XI. 9. Cu operaţiile naturale, $L_X^p(\mu)$ este un spaţiu vectorial, iar $\| \ \|_p$ este o normă pe $L_X^p(\mu)$.

DEMONSTRAŢIE. Totul rezultă din inegalitatea lui Minkowski. Să remarcăm că trecerea la clase de echivalenţă a fost necesară pentru a obţine $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$, ceea ce se întîmplă la nivel de clase.

TEOREMA XI. 10. $L_X^p(\mu)$ este un spaţiu Banach.

DEMONSTRAŢIE. Fie $(f_n)_n$ un şir Cauchy în $L_X^p(\mu)$. Se poate găsi un subşir $(f_{n_i})_i$ astfel încît

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}, \ i = 1,2,...$$

Notăm

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \ g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

dar

$$\|g_k\| \le \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \le \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^k} < 1.$$

Deducem, folosind teorema lui Fatou, că

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} g_k^p d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X g_k^p d\mu \le 1.$$

Dar $g^p = \lim_{k\to\infty} g_k^p$ deci $\int_X g^p d\mu \le 1$. Rezultă $g(x) < +\infty$ aproape pentru toate punctele $x \in X$ deci seria

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

converge absolut a.p.t. Notăm $f(x)$ suma acestei serii pentru care converge şi 0 în rest; f este măsurabilă. Avem $f(x) = \lim f_{n_i}$ a.p.t. Vom arăta că $f \in L_X^p(\mu)$ şi $f_n \to f$ în $L_X^p(\mu)$.

Fie $\varepsilon > 0$. Există N_ε astfel încît $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ dacă $n,m > N_\varepsilon$. Fixînd $m > N_\varepsilon$, obţinem din lema lui Fatou

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \le \liminf \int_X |f_{n_i} - f_m| d\mu \le \varepsilon^p$$

deci $f - f_m \in L_X^p(\mu)$ deci $f \in L_X^p(\mu)$ şi în plus $\|f - f_m\|_p \xrightarrow{m\to\infty} 0$; teorema este demonstrată.

OBSERVAŢIE. Teorema de mai sus este deosebit de importantă arătînd utilitatea integralei Lebesgue. Spaţiile de tip L^p ce pot fi definite cu ajutorul integralei Riemann nu sunt **complete**. În fapt completatele lor sunt L^p de tip Lebesgue. Deci integrala Lebesgue furnizează completate **concrete** pentru spaţii de tip L^p de funcţii continue de exemplu.

Spaţiul $L_X^\infty(\mu)$. Fie $f : X \to [0,\infty]$ măsurabilă şi fie $S = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \mu(g^{-1}(\alpha,\infty]) = 0\}$. Dacă $S = \emptyset$ punem esssup $g = +\infty$. Dacă $S \ne \emptyset$ punem esssup $g = \inf S$. esssup g este marginea superioară "esenţială" a lui g. Notăm, pentru $f : X \to \mathbb{C}$ măsurabilă, $\|f\|_\infty = $ esssup $|f|$ şi fie

$$L^\infty_X(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C}; f \text{ măsurabilă}, \|f\|_\infty < +\infty\}.$$

Se introduce pe $L^\infty_X(\mu)$ relaţia de echivalenţă $f \sim g$ dacă $f = g$ a.p.t. şi se arată imediat că $L^\infty_X(\mu)$ este un spaţiu Banach pentru $\| \|_\infty$ (spaţiul claselor etc.).

Vom încheia acest paragraf cu următoarea importantă

TEOREMA IX. 11. (N. LUZIN, 1883-1950). Fie C mulţimea funcţiilor continue pe $\mathbb{R}^k$. Atunci $C \cap L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$ este densă în $L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$ (μ = măsura Lebesgue), (în sensul că orice f în $L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$ este limita unui şir din $C \cap L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$).

DEMONSTRAŢIE. Să observăm că mulţimea S a funcţiilor măsurabile (clase de) care iau un număr finit de valori şi sunt integrabile este densă în $L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$ (dacă $f \in L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$, $f \geq 0$ se consideră $0 \leq s_n \nearrow f$, s_n simple şi se aplică teorema de convergenţă dominantă; cazul f oarecare se reduce la cazul $f \geq 0$).
Este deci suficient să arătăm deci că orice funcţie ce ia un număr finit de valori şi este în $L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$ se poate aproxima (în $L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$) cu funcţii continue (din $L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$). Cum funcţiile ce iau un număr finit de valori sunt combinaţii liniare de funcţii caracteristice, este suficient să considerăm X_M cu M măsurabilă şi $\mu(M) < \infty$ (căci $X_M \in L^1_{\mathbb{R}^k}(\mu)$). Fie $\forall\ \varepsilon > 0$. Din proprietăţile de regularitate a măsurii Lebesgue, găsim o mulţime închisă $F \subset M$ şi o mulţime deschisă $M \subset G$, astfel încît $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$. Să definim funcţia $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, prin

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^k - G)}{d(x, \mathbb{R}^k - G) + d(x, F)},\quad x \in \mathbb{R}^k,$$

unde pentru orice mulţime $A \subset \mathbb{R}^k$,

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

$d(x,y)$ fiind distanţa euclidiană. φ_ε este o funcţie continuă nulă pentru $x \in \mathbb{R}^k - G$ şi egală cu 1 pe F. Se observă imediat că φ_ε este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}^k$. În plus, $|\chi_M - \varphi_\varepsilon| \leq 1$ pe $G - F$ şi $\chi_M = \varphi_\varepsilon$ în rest. Deci în definitiv,

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\chi_M - \varphi_\varepsilon|\, d\mu < \varepsilon$$

deci $\|\chi_M - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Teorema este demonstrată.

OBSERVAŢIE. Teorema se extinde cu uşurinţă la $L^p_{\mathbb{R}^k}(\mu)$, $1 < p < \infty$.

4. 10 exerciţii

1. Dacă $(A_n)_n$, $(B_n)_n$ sunt şiruri de părţi în $\mathbb{R}^k$ atunci din $A_n \to A$, $B_n \to B$ rezultă $A_n \cup B_n \to A \cup B$, $A_n \cap B_n \to A \cap B$.

2. Dacă $A,B \in \mathbb{R}^k$ şi $\mu^*(B) < \infty$, atunci $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$.

3. Pe intervalul (0,1) se introduce relaţia de echivalenţă $x \sim y$ dacă $x - y \in \mathbb{Q}$ şi fie $E \subset (0,1)$ o mulţime ce conţine câte un element din fiecare clasă de echivalenţă. Să se arate că E nu este măsurabilă Lebesgue.

4. Să se calculeze $\iiint_L \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ unde L este mărginit de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

5. Să se demonstreze inegalităţile Hölder şi Minkowski.

6. Să se determine aria compactului plan mărginit de curbele $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$; $a,b,p,q > 0$, $a < b$, $p < q$.

7. Să se afle volumul compactului $K \subset \mathbb{R}^3$ mărginit de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, $z = xy$, cu $x,y \geq 0$.

8. Pornind de la integrala $I = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ să se calculeze $J = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

9. Să se calculeze volumul compactului $L \subset \mathbb{R}^3$ mărginit de "suprafaţa"

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z,\ a > 0,\ x, y \geq 0.$$

10. 1) Să se calculeze volumul mărginit de

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad h_1, h_2, h_3 > 0.$$

2) Să se calculeze $I = \iiint\limits_K \sqrt{x^2 + y^2}\, dx dy dz$, unde K este compactul mărginit de $x^2 + y^2 = ax$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, $a > 0$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Se arată că
$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),$$
$$(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),$$
$$(A_1 - A_2) \Delta (B_1 - B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),$$
pentru orice $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^k$. Se deduce că
$$\mu^*[(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)] \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2),$$
$$\mu^*[(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2)] \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2),$$
$$\mu^*[(A_1 - A_2) \Delta (B_1 - B_2)] \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2).$$
Avem în definitiv
$$\mu^*[(A_n \cup B_n) \Delta (A \cup B)] \leq \mu^*(A_n \Delta A) + \mu^*(B_n \Delta B) \text{ etc.}$$

2. Să presupunem de exemplu că $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$. Avem
$$\mu^*(A \Delta \emptyset) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B \Delta \emptyset)$$
de unde
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B)$$
şi deci
$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A \Delta B).$$

3. Să presupunem că E ar fi măsurabilă şi $\mu(E) = \alpha$. Se verifică uşor că $(0,1) \subset \bigcup_r (E + r)$ cînd $r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$ şi dacă $r \neq s$ atunci $(E + r) \cap (E + s) = \emptyset$. Vom avea pentru $S = \bigcup_r (E + r)$, $\mu(S) = \sum_r \mu(E + r)$ (numărabil aditivitate) şi $\mu(S) < \infty$ căci

$S \subset (-1,2)$. Dar $\mu(E + r) = \alpha$ pentru orice r (invarianţa la translaţie). Rezultă $\alpha = 0$ ceea ce este în evidentă contradicţie cu $(0,1) \subset S$.

4. Conform teoremei Fubini ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2(x,y) = 1 - x - y$ în exemplul 3 pag. 258)
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + x)^3} \right) dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3}.$$
(integralele se calculează de la dreapta spre stînga). Se obţine
$$I = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

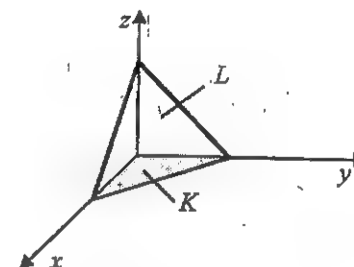


Fig. XI. 2.

5. Să notăm
$$A = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$
Inegalitatea lui Hölder rezultă imediat dacă $A = 0$ (căci f rezultă 0 a.p.t.) Analog cazul $B = 0$. Cazul $A > 0$, $B = \infty$ rezultă imediat (şi evident analog cazul $A = \infty$, $B = 0$). Rămîne de demonstrat doar cazul $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$. Se notează
$$F = \frac{f}{A}, \quad G = \frac{g}{B} \quad \text{deci} \quad \int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1.$$
Dacă pentru $x \in X$ avem $0 < F(x) < \infty$, $0 < G(x) < \infty$, există numere reale s şi t cu $F(x) = e^{s/p}$, $G(x) = e^{t/q}$. Din convexitatea funcţiei exponenţiale (graficul funcţiei între două puncte este "sub" segmentul de dreaptă ce uneşte punctele) şi din $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ deducem
$$e^{s/p + t/q} \leq \frac{1}{p} e^s + \frac{1}{q} e^t;$$
avem deci
$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p} F(x)^p + \frac{1}{q} G(x)^q$$
care integrată pe X duce rapid la inegalitatea lui Hölder.

Pentru inegalitatea lui Minkowski se scrie

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

Se aplică inegalitatea lui Hölder produselor din membrul drept şi se foloseşte convexitatea funcţiei t^p, $t \in (0,\infty)$.

6. Avem de calculat $\iint_K dx\,dy$ unde K este compactul haşurat. Se poate schimbarea de variabilă $xy = u$, $y = vx$, $u \in [p,q]$, $v \in [a,b]$.

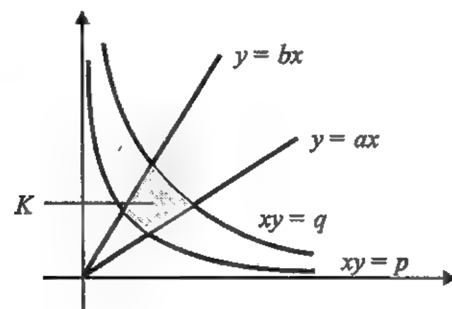


Fig. XI. 3.

Se calculează jacobianul transformării $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ deduse din schimbarea de variabilă şi se obţine $J = \frac{1}{2v}$. Se obţine deci

$$\text{aria } K = \iint_K dx\,dy = \int_p^q\int_a^b \frac{du\,dv}{2v} = \frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}.$$

7. Conform formulei stabilite pentru calculul volumelor (exemplul 3 pag. 258) vom avea

$$\text{vol } K = \iint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ x,y\ge 0}} xy\,dx\,dy.$$

$x = ar\cos t$, $y = br\sin t$ şi găsim

$$\text{vol} K = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2b^2r^3\sin t\cos t\,dt = a^2b^2\int_0^1 r^3 dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt = \frac{a^2b^2}{8}.$$

8. Folosind teorema lui Fubini (pe $[0,\infty)\times[0,\infty)$) deducem că $e^{-(x^2+y^2)}$ este integrabilă Lebesgue pe $[0,\infty)\times[0,\infty)$. În adevăr

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dy\right)dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2$$

şi se ştie că $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ este finită. În plus $I = J^2$. Pentru calculul integralei I se trece în coordonate polare $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ şi obţinem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9. Se trece în coordonate sferice $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Se obţine ecuaţia "suprafeţei" în coordonate sferice $r = a\sqrt[3]{\cos\theta}$. Jacobianul schimbării de variabilă este $J = r^2\sin\theta$. Din cauza simetriei suprafeţei vom avea

$$\text{vol} L = \iiint_L dx\,dy\,dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2\sin\theta\,dr = \frac{\pi a^3}{3}$$

(integralele se calculează de la dreapta la stînga).

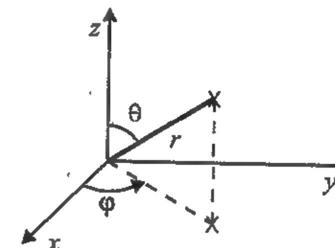


Fig. XI. 4.

10. 1) Se face schimbarea de variabilă

$$u = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$v = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$w = a_3x + b_3y + c_3z \text{ etc.}$$

Se obţine $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$.

2) Se trece în coordonate cilindrice $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = z$. Jacobianul schimbării de variabilă este r. Conul $z^2 = x^2 + y^2$ are în consecinţă ecuaţia $z = r$. Se obţine

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos t} \int_0^r r^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ r \in [0, \cos t],\ z \in [0, r]$$

căci ecuaţia cilindrului $x^2 + y^2 = ax$ este $r^2 = ar\cos t$. După calcule simple găsim

$$I = \frac{3\pi a^4}{32}.$$

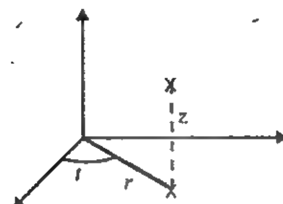


Fig. XI. 5.

LECŢIA A XII–A

INTEGRALE CURBILINII, INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ

INTRODUCERE

Vom studia în această lecţie integrarea 1 – formelor diferenţiale pe arce orientate (integrala curbilinie) şi integrarea 2 – formelor diferenţiale pe pînze orientate (integrale de suprafaţă). Teoria prezentată admite generalizări n – dimensionale şi la varietăţi diferenţiabile dar, chiar dacă nu apar idei noi, "tehnica" folosită este destul de elaborată şi necesită adîncirea algebrei multiliniare.

1. Integrarea 1 – formelor diferenţiale

Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $f : A \to \mathbb{R}^m$, spunem că f este **de clasă** C^k **pe** A dacă:

– pentru $k = 0$, f este continuă;

– pentru $k \geq 1$ există o mulţime deschisă $U \supset A$ şi o funcţie $F : U \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^k astfel încît $F|_A = f$.

Vom nota $\mathbb{R}^{n'} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ spaţiul vectorial normat al aplicaţiilor liniare (continue) din $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^{n'}$ este un spaţiu vectorial real de dimensiune n. Dacă $e_1,\dots,e_n$ este **baza canonică** în $\mathbb{R}^n$, atunci $\mathrm{d}x_1,\dots,\mathrm{d}x_n$ formează o bază în $\mathbb{R}^{n'}$, numită **baza duală** (reamintim că $\mathrm{d}x_i(e_j) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\dots,n$). Elementele din $\mathbb{R}^{n'}$ se mai numesc **forme liniare** pe $\mathbb{R}^n$.

Definiţia XII.1. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Se numeşte **cîmp de vectori** de clasă C^k pe A orice aplicaţie de clasă C^k, $F : A \to \mathbb{R}^n$.

EXEMPLUL 1. Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : U \to \mathbb{R}$ de clasă C^1. **Gradientul** lui f este cîmpul de vectori de clasă C^0 $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$, definit prin

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right), \quad x \in U.$$

Definiţia XII. 2. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Se numeşte **1 - formă diferenţială** de clasă C^k pe A orice aplicaţie de clasă C^k, $\alpha : A \to \mathbb{R}^{n'}$.

EXEMPLUL 2. Fie $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $U \subset \mathbb{R}^n$. **Diferenţiala** lui f este 1 - forma diferenţială de clasă C^0 $\alpha : U \to \mathbb{R}^{n'}$

$$\alpha(x) = df(x).$$

Această 1 - formă se notează df. Vom folosi termenul **1 - formă** în loc de 1 – formă diferenţială. Rezultă că $dx_1,...,dx_n$ pot fi interpretate ca diferenţialele proiecţiilor canonice $(x_1,...,x_n) \mapsto x_i$, $i = 1,...,n$. Putem scrie

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \text{ şi de asemenea } df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i .$$

Să notăm $X_k(A)$ mulţimea cîmpurilor de clasă C^k pe A şi $\Omega_k^1(A)$ mulţimea 1 – formelor de clasă C^k pe A. Se defineşte în mod natural adunarea pentru cîmpuri de vectori şi pentru 1 – forme, ca adunare de funcţii cu valori în spaţii vectoriale. Mai nou, cîmpurile şi 1 – formele se pot înmulţi cu funcţii, după cum urmează:
Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este de clasă C^k atunci:

$$\text{pentru } F \in X_k(A),\ (fF)(x) = f(x)F(x),\ \forall\, x \in A,$$

$$\text{pentru } \alpha \in \Omega^1{}_k(A),\ (f\alpha)(x) = f(x)\alpha(x),\ \forall\, x \in A.$$

Este clar că $fF \in X_k(A)$ şi $f\alpha \in \Omega_k^1(A)$.

Operaţiile mai sus definite au proprietăţi naturale $X_k(A)$ şi $\Omega_k^1(A)$ sunt "module" peste inelul funcţiilor de clasă C^k pe A şi în particular, spaţii vectoriale reale).
Între 1 – forme şi cîmpuri de vectori există o "dualitate". Anume pentru $\alpha \in \Omega_k^1(A)$ şi $F \in X_k(A)$, se defineşte funcţia $\alpha{\cdot}F : A \to \mathbb{R}$, prin

$$(\alpha{\cdot}F)(x) = \alpha(x)(F(x)),\ \forall\, x \in A$$

(reamintim că $\alpha(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pentru orice $x \in A$ iar $F(x) \in \mathbb{R}^n$ etc.). Fiecare 1 – formă $\alpha \in \Omega_k^1(A)$ se scrie în mod unic ca

$$\alpha = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$$

unde $a_i : A \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^k. Deci în fiecare $x \in A$ avem

$$\alpha(x) = a_1(x)dx_1 + ... + a_n(x)dx_n.$$

OBSERVAŢIE. În ultima formulă, $dx_1,...,dx_n$ reprezintă "baza duală" în $\mathbb{R}^{n'}$, iar în scrierea $\alpha = \sum_1^n a_i dx_i$, $dx_1,...,dx_n$ sunt 1 – formele corespunzătoare proiecţiilor, aşa cum am arătat mai sus.

Definiţia XII. 3. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $\varphi : A \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1 şi $B \supset \varphi(A)$. Pentru orice 1 – formă α pe B definim **imaginea inversă** (prin φ), notată $\varphi^*\alpha$ ca 1 – formă pe A, prin

$$\varphi^*\alpha(x) = \alpha(\varphi(x)) \circ d\varphi(x),\ \forall\, x \in A.$$

Pentru o mai bună înţelegere a acestei definiţii, să remarcăm că pentru $x \in A$, $d\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este liniară şi de asemenea $\alpha\varphi(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este liniară. Astfel $\alpha(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)$ este o compunere de aplicaţii liniare deci o aplicaţie liniară $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. În definitiv $\varphi^*\alpha : A \to \mathbb{R}^{n'}$.

Se observă imediat că dacă $\alpha \in \Omega_0^1(B)$ atunci $\varphi^*\alpha \in \Omega_0^1(A)$, iar dacă $\alpha \in \Omega_k^1(B)$, $k \geq 1$, atunci $\varphi^*\alpha \in \Omega_{k-1}^1(A)$.

TEOREMA XII. 1. În contextul de mai sus, avem
1) $\varphi^*(\alpha + \beta) = \varphi^*\alpha + \varphi^*\beta$; α,β 1 – forme pe B.
2) $\varphi^*(f\alpha) = (f \circ \varphi)\varphi^*\alpha$; α este 1 – formă pe B, $f : B \to \mathbb{R}$ etc.
3) Dacă B este deschisă şi $g : B \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1, atunci

$$\varphi^*(dg) = d(g \circ \varphi)$$

(deci imaginea inversă a unei diferenţiale este tot o diferenţială).

DEMONSTRAŢIE. Lăsăm 1) şi 2) în seama cititorului şi demonstrăm 3). Avem

$$\varphi^*(dg)(x) = dg(\varphi(x)) \circ d\varphi(x) = d(g \circ \varphi)(x),$$

după cum rezultă din teorema de diferenţiere a funcţiilor compuse.

TEOREMA XII. 2. Dacă $\varphi : A \to B$, $\Psi : B \to \mathbb{R}^p$ unde $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ sunt deschise şi α este o 1 – formă pe $C \supset \Psi(B)$, atunci

$$\varphi^*(\Psi^*\alpha) = (\Psi \circ \varphi)^*\alpha.$$

Demonstraţia este o simplă verificare.

Să dăm o formulă pentru calculul imaginilor inverse ale 1 – formelor. Să notăm $y = (y_1,...,y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\varphi : A \to B$ ca mai sus şi fie

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} a_j dy_j, \text{ cu } a_j : B \to \mathbb{R}.$$

Atunci, conform teoremelor precedente, avem

$$\varphi^*\alpha = \varphi^*\Big(\sum_{j=1}^{m} a_j \mathrm{d}y_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \varphi^*(a_j \mathrm{d}y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_j \circ \varphi)\varphi^*(\mathrm{d}y_j) = \sum_{j=1}^{m} (a_j \circ \varphi)\mathrm{d}\varphi_j \quad \text{unde } \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$$

deci

$$\varphi^*\alpha = \sum_{j=1}^{m} (a_j \circ \varphi)\mathrm{d}\varphi_j .$$

Dar

$$\mathrm{d}\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

şi obţinem în definitiv (schimbînd ordinea de sumare):

$$(1) \qquad \boxed{\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_j \circ \varphi \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i}$$

sau

$$(2) \qquad \boxed{\varphi^*\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_j(\varphi(x))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x_i}, \text{ pentru orice } x \in A.$$

Să considerăm cazul particular $n = 1$ şi să luăm $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1. Să notăm variabila în $[a,b]$ cu t şi să observăm că derivatele lui φ în a şi b determină derivatele în a, b ale oricărei extensii de clasă C^1 la un interval deschis. Putem aplica formula (2) şi avem

$$(3) \qquad \varphi^*\alpha(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(\varphi(t))\varphi_j'(t)\,\mathrm{d}t ,$$

unde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ şi α este o 1 – formă pe o mulţime ce conţine $\varphi[a,b] \subset \mathbb{R}^m$.

Fie acum $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie de clasă C^1 (în lecţia a IV-a am numit φ **drum parametrizat**) şi α o 1 – formă continuă pe compactul $\varphi[a,b]$ (deci pe imaginea drumului).

Definiţia XII. 4. Integrala curbilinie a 1 – formei α pe drumul parametrizat φ se defineşte prin

$$\int_\varphi \alpha = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi(t))\varphi_i'(t) \right) \mathrm{d}t$$

(integrala **există** chiar în sens Riemann căci funcţia $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)$ este continuă în ipotezele făcute).

OBSERVAŢIE. 1) În fond $\int_\varphi \alpha = \int_a^b \varphi^*\alpha$, dacă se **identifică** $\varphi^*\alpha$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)$, cum rezultă uşor din formula (3).

2) În $\mathbb{R}^2$, 1 – formele se notează tradiţional $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ iar în $\mathbb{R}^3$, $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ conform notării coordonatelor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, respectiv $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Pentru a extinde definiţia de mai sus, vom relua pe scurt cîteva noţiuni prezentate în lecţia a IV-a relativ la drumuri parametrizate. Fie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri parametrizate de clasă C^k; φ, Ψ se zic C^k – **echivalente** ($k \geq 1$) dacă există un difeomorfism C^k $\theta : [a,b] \to [c,d]$, astfel încît $\varphi = \Psi \circ \theta$. θ se zice **schimbare de parametru**. Un **arc** de clasă C^1 este o clasă de echivalenţă de drumuri parametrizate C^k echivalente. Mai simplu un arc de clasa C^k este mulţimea tuturor drumurilor parametrizate (de clasă C^k) care se obţin unul din altul prin schimbări de parametru de clasă C^k. Dacă γ este un arc de clasa C^k şi φ un drum parametrizat de clasă C^k, este clar ce înseamnă $\varphi \in \gamma$; spunem în acest caz că φ este o **parametrizare admisibilă** a lui γ.

O relaţie de echivalenţă mai fină duce la noţiunea de **arc orientat**. Anume, o schimbare de parametru se zice că **păstrează orientarea** dacă este strict crescătoare şi că **schimbă orientarea** dacă este strict descrescătoare. Două drumuri parametrizate (de clasă C^k) se zic **pozitiv** C^k – echivalente dacă se obţin unul din altul pentru o schimbare de parametru ce păstrează orientarea. O clasă de echivalenţă de drumuri pozitiv C^k – echivalente se numeşte **arc orientat**. Drumurile parametrizate care aparţin unui arc orientat γ se numesc **parametrizări admisibile** ale arcului γ. Să observăm că se obţine un arc orientat pornind de la un drum parametrizat şi considerînd toate drumurile ce se obţin din el prin schimbări de parametru ce păstrează orientarea.

TEOREMA XII. 3. Fie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ două parametrizări admisibile ale unui arc γ de clasă C^1 şi α o 1 – formă continuă pe mulţimea $\varphi[a,b] = \Psi[c,d]$.

1) Dacă φ, Ψ sunt pozitiv echivalente, atunci

$$\int_\varphi \alpha = \int_\Psi \alpha .$$

2) Dacă φ, Ψ se obţin unul din altul printr-o schimbare de parametru care schimbă orientarea, atunci

$$\int_\varphi \alpha = -\int_\Psi \alpha .$$

DEMONSTRAŢIE.

1) Din ipoteză rezultă că există o schimbare de parametru $\theta : [a,b] \to [c,d]$ strict crescătoare astfel încît $\varphi = \Psi \circ \theta$. Să notăm t variabila în $[a,b]$ şi u variabila în $[c,d]$; deci $u = \theta(t)$. Avem $\varphi^*\alpha = \theta^*(\Psi^*\alpha)$, conform teoremei XII. 2. Să notăm pe scurt $\Psi^*\alpha = A\mathrm{d}u$ cu $A : [c,d] \to \mathbb{R}$ deci $\Psi^*\alpha(u) = A(u)\mathrm{d}u$ pe $[c,d]$ şi deci $\theta^*(\Psi^*\alpha)(t) = A(\theta(t))\theta'(t)\mathrm{d}t$ (conform regulilor de calcul ale imaginii inverse). Deci avem

$$\varphi^*\alpha(t) = A(\theta(t))\theta'(t)\mathrm{d}t,\ \Psi^*\alpha(u) = A(u)\mathrm{d}u.$$

Teorema de schimbare de variabilă (integrala Riemann) dă

$$\int_\varphi \alpha = \int_a^b A(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} A(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^d A(u)\,\mathrm{d}u = \int_\Psi \alpha .$$

Demonstraţia punctului 2) este acum imediată ($\theta(a) = d$, $\theta(b) = c$ dacă θ descreşte etc.).

În definitiv, integrala unei 1 – forme **nu se schimbă** la o schimbare de parametru ce **păstrează orientarea** şi **schimbă doar semnul** la o schimbare de parametru **ce schimbă orientarea**. Putem ajunge astfel la definiţia principală.

Definiţia XII. 4′. Fie γ un **arc orientat de clasă C^1 în $\mathbb{R}^n$** şi α o **1 – formă** continuă pe imaginea lui γ. Definim

$$\int_\gamma \alpha = \int_\varphi \alpha ,$$

unde $\varphi \in \gamma$ (φ este o parametrizare admisibilă).

Din cele de mai sus rezultă că definiţia este corectă (nu depinde de parametrizarea admisibilă folosită).

OBSERVAŢIE. Prin imaginea unui arc se înţelege imaginea, comună, a parametrizărilor admisibile.

Fie γ un arc orientat de clasă C^1 în $\mathbb{R}^n$. Să reamintim că **lungimea** $l(\gamma)$ se defineşte ca $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t$, pentru o parametrizare admisibilă $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (şi este independentă de parametrizare). Desigur, $\|\ \|$ este norma euclidiană în $\mathbb{R}^n$. Fie $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{d}x_i$ o 1 – formă continuă pe imaginea lui γ. Dacă notăm $a = (a_1,...,a_n)$, cu funcţiile $a_1,...,a_n$ continue şi fie $M > 0$ astfel încît $\|a(x)\| \le M$ pentru orice x din imaginea lui γ. Deducem

$$\left|\int_\gamma \alpha\right| = \left|\int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b \left|\sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\right|\mathrm{d}t \le$$

$$\le \int_a^b \|a(\varphi(t))\|\,\|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \le Ml(\gamma)$$

(s-a folosit inegalitatea lui Cauchy – Schwartz). În definitiv,

$$\left|\int_\gamma \alpha\right| \le Ml(\gamma),$$

inegalitate utilă în aplicaţii.

Vom face o legătură între 1 – forme şi cîmpuri de vectori, pentru a exprima integrala curbilinie în limbaj vectorial.

Dacă $\alpha \in \Omega_k^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ atunci $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{d}x_i$ cu $a_1,...,a_n : A \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^k. Putem considera cîmpul de vectori $a = (a_1,...,a_n) \in \mathcal{X}_k(A)$. Dacă γ este un arc orientat de clasă C^1 în $\mathbb{R}^n$ şi $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{d}x_i$ o 1 – formă continuă pe imaginea lui γ, integrala $\int_\gamma \alpha$ se mai numeşte şi **circulaţia** cîmpului $a = (a_1,...,a_n)$ de-a lungul arcului γ.

Comentariu. Dacă folosim notaţia vectorială $\boldsymbol{a}$ pentru cîmpuri de vectori, $\boldsymbol{r} = (x_1,...,x_n)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x_1,...,\mathrm{d}x_n)$, atunci circulaţia cîmpului $\boldsymbol{a}$ de-a lungul lui γ se scrie formal

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

"interpretînd" $\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{d}x_i$ ca un "produs scalar" între $\boldsymbol{a}$ şi $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. De exemplu, dacă $n = 3$ şi $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ este un cîmp de forţe într-un deschis $A \subset \mathbb{R}^3$ şi dacă γ este un arc orientat de clasă C^1 în $\mathbb{R}^3$, atunci **lucrul** efectuat de $\boldsymbol{F}$ în lungul lui γ este tocmai $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$, deci noţiunea de circulaţie extinde pe cea de lucru.

Revenind la proprietăţile integralelor curbilinii, reţinem următoarea teoremă deosebit de importantă:

TEOREMA XII. 4. (generalizarea formulei Leibniz – Newton). Fie γ un arc orientat de clasă C^1 în $\mathbb{R}^n$, de extremităţi p şi q şi f o funcţie de clasă C^1 pe un deschis ce conţine imaginea lui γ. Atunci

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p).$$

DEMONSTRAŢIE. Să precizăm că extremităţile unui arc orientat γ se definesc considerînd o parametrizare admisibilă $\varphi \in \gamma$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$: $p = \varphi(a)$, $q = \varphi(b)$, observînd că p, q depind doar de γ şi nu de parametrizarea admisibilă aleasă. Fie acum $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ o parametrizare admisibilă a lui γ. Avem $\varphi^*(df) = d(f\circ\varphi)$ sau $\varphi^*(df)(t) = (f\circ\varphi)'(t)dt$. Deducem

$$\int_\gamma df = \int_a^b (f\circ\varphi)'(t)\,dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(q) - f(p).$$

COROLAR. În ipotezele teoremei de mai sus, dacă γ este un arc închis (adică dacă $p = q$), atunci $\int_\gamma df = 0$.

Teorema de mai sus este o teoremă de "independenţă a integralei de drum", în cazul 1 – formelor de tip df.

Avînd în vedere importanţa teoremei XII. 4, este utilă studierea 1 – formelor de tip df. Problema care se pune este: în ce condiţii, pentru o 1 – formă α pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^n$, există o funcţie astfel încît $\alpha = df$? Să presupunem 1 – forma $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, unde funcţiile $a_1,\dots,a_n$ sunt de clasă C^1 pe $U \subset \mathbb{R}^n$. Dacă există o funcţie $f : U \to \mathbb{R}$ astfel încît $df = \alpha$ atunci f este de clasă C^2 pe U şi $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = a_n$ pe U. Din egalitatea derivatelor parţiale mixte, rezultă condiţia **necesară**:

$$(*) \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i},\ i,j = 1,\dots,n.$$

Se naşte întrebarea dacă această condiţie este şi suficientă.

TEOREMA XII. 5. (H. POINCARÉ, 1854 – 1912). Fie α o 1 – formă de clasă C^1 pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^n$, satisfăcînd condiţia (*). Atunci pentru orice punct $x \in U$ există o vecinătate deschisă V a lui x ($V \subset U$) şi o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$ astfel încît $df = \alpha$ (pe V).

DEMONSTRAŢIE. Fie un punct $x_0 \in U$. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $x_0 = 0$ (se face o translaţie). Fie $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ Să alegem $r > 0$ astfel încît $B(0,r) \subset U$. Vom arăta că putem lua $V = B(0,r)$. Definim funcţia $f : B(0,r) \to \mathbb{R}$ prin

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(tx_1,\dots,tx_n)x_i\,dt,\ x = (x_1,\dots,x_n).$$

Să arătăm că $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1$ pe $B(0,r)$ (similar se arată că $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$ pentru $i = 2,\dots,n$). Avem prin derivare sub integrală

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) = \int_0^1 \left[a_1(tx_1,\dots,tx_n) + t\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial a_i}{\partial x_1}(tx_1,\dots,tx_n)\right]dt$$

sau folosind condiţia (*)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) = \int_0^1 \left[a_1(tx_1,\dots,tx_n) + t\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial a_1}{\partial x_i}(tx_1,\dots,tx_n)\right]dt.$$

Dacă pentru $x = (x_1,\dots,x_n)$ fixat, notăm $\Psi(t) = a_1(tx_1,\dots,tx_n)$, $t \in [0,1]$, găsim

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) = \int_0^1 [\Psi(t) + t\Psi'(t)]\,dt = t\Psi(t)\big|_0^1 = \Psi(1) = a_1(x_1,\dots,x_n)$$

şi cum $x = (x_1,\dots,x_n)$ este arbitrar în $B(0,r)$, rezultă $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1$ pe $B(0,r)$ şi demonstraţia este încheiată.

OBSERVAŢIE. Se observă că esenţială în demonstraţia precedentă este condiţia: pentru orice $x \in B(0,r)$, "segmentul" $[0,x]$ este conţinut în $B(0,r)$. O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ se zice **stelată dacă există un punct** $x_0 \in A$ astfel încît pentru orice $x \in A$ segmentul $[x_0,x]$ să fie conţinut în A. Rezultă că în teorema precedentă dacă U este stelată, atunci există $f : U \to \mathbb{R}$ cu $df = \alpha$.

O funcţie satisfăcînd $df = \alpha$ se zice o **primitivă** pentru 1 – forma α. Putem reformula teorema de mai sus spunînd că orice 1 – formă de clasă C^1 satisfăcînd condiţia (*) admite **local** primitive, iar dacă mulţimea de definiţie este stelată, atunci primitive există global (este imediat de observat că pe o mulţime deschisă şi conexă două primitive ale aceleiaşi 1 – forme diferă printr-o constantă).

Putem exprima teorema XII. 5 şi în limbaj de teoria cîmpurilor. Astfel, un cîmp vectorial $\boldsymbol{F} = (a_1,\dots,a_n)$ se zice **cîmp de gradienţi** dacă există o funcţie f astfel încît $\nabla f = \boldsymbol{F}$. Se observă imediat că (*) reprezintă o condiţie necesară pentru ca un cîmp $\boldsymbol{F} = (a_1,\dots,a_n)$ de clasă C^1 să fie un cîmp de gradienţi. Teorema XII. 5 arată că invers, un cîmp de clasă C^1 ce satisface (*) este **local** un cîmp de gradienţi.

2. Integrarea 2 – formelor diferenţiale

Dacă E este un spaţiu vectorial real, o aplicaţie $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ se numeşte **formă biliniară** pe E dacă este liniară în fiecare variabilă. O formă biliniară φ pe E se zice **alternată** dacă $\varphi(v,v) = 0$ pentru orice $v \in E$. Se verifică imediat că această condiţie este **echivalentă** cu condiţia

$$\varphi(v_1,v_2) = -\varphi(v_2,v_1),$$

pentru orice $v_1,v_2 \in E$.

EXEMPLUL 1. Fie $E = \mathbb{R}^2$; punem pentru $v_1 = (x_1,y_1)$, $v_2 = (x_2,y_2)$,

$$\varphi(v_1,v_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 .$$

Se verifică imediat că φ este biliniară alternată. Semnificaţia geometrică este că φ reprezintă aria "orientată" a paralelogramului construit pe vectorii v_1,v_2. Acest exemplu creează o "intuiţie" utilă în teoria integrării 2 – formelor diferenţiale ce va fi descrisă mai jos.

Se observă imediat că mulţimea formelor biliniare alternate pe E formează, în raport cu operaţiile naturale, un spaţiu vectorial real, care va fi notat Λ^2E'. Dacă φ este o formă biliniară pe E, atunci forma $\tilde{\varphi}$ dată de

$$\tilde{\varphi}(v_1,v_2) = \frac{\varphi(v_1,v_2) - \varphi(v_2,v_1)}{2}$$

este clar biliniară alternată; dacă φ e alternată, atunci $\tilde{\varphi} = \varphi$. Dualul $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ va fi notat în cele ce urmează şi cu Λ^1E'. Fiind date $\alpha,\beta \in \Lambda^1E'$, definim $\alpha \otimes \beta$ ca formă biliniară, prin

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1,v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2).$$

Mai departe definim $\alpha \wedge \beta$ prin

$$\alpha \wedge \beta = 2\cdot\widetilde{\alpha \otimes \beta}.$$

Evident, $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2E'$ şi acest element (care este o formă biliniară pe E) se numeşte **produsul exterior** al formelor liniare α şi β. În definitiv

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1,v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1),\ \forall\ v_1,v_2 \in E.$$

Se verifică imediat proprietăţile

(1) $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, \quad \forall\ \alpha,\beta \in \Lambda^1E'$ (în particular, $\alpha \wedge \alpha = 0$),

(2) $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma, \quad \forall\ \alpha,\beta,\gamma \in \Lambda^1E'$.

EXEMPLUL 2. Fie $E = \mathbb{R}^2$, e_1,e_2 baza canonică şi dx_1, dx_2 baza duală. Fie $\varphi \in \Lambda^2E'$. Pentru orice $v_1 = x_1e_1 + y_1e_2$, $v_2 = x_2e_1 + y_2e_2$, avem

$$\varphi(v_1,v_2) = \varphi(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = (x_1y_2 - x_2y_1)\varphi(e_1,e_2).$$

Dar

$$x_1y_2 - x_2y_1 = dx_1 \wedge dx_2\,(v_1,v_2).$$

În definitiv

$$\varphi = \varphi(e_1,e_2)dx_1\wedge dx_2.$$

Rezultă $\dim_{\mathbb{R}}\Lambda^2\mathbb{R}^{2'} = 1$ şi $dx_1\wedge dx_2$ formează o bază. De remarcat că în general se foloseste notaţia dx, dy în loc de dx_1, dx_2. Aşadar, $\forall\ \varphi \in \Lambda^2\mathbb{R}^{2'}$ se scrie unic sub forma $\varphi = a dx\wedge dy$ cu $a \in \mathbb{R}$.

EXEMPLUL 3. Fie $E = \mathbb{R}^3$, dx, dy, dz baza duală bazei canonice. Similar exemplului precedent, deducem că $\dim_{\mathbb{R}}\Lambda^2\mathbb{R}^{3'} = 3$ şi că $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$, $dx\wedge dy$ formează o bază a acestui spaţiu vectorial. Deci orice $\alpha \in \Lambda^2\mathbb{R}^{3'}$ se scrie unic sub forma

$$\alpha = a_1dy\wedge dz + a_2dz\wedge dx + a_3dx\wedge dy, \text{ cu } a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}.$$

Mai general se poate arăta că $\Lambda^2E^{n'}$ are dimensiune finită anume C_n^2, ca spaţiu vectorial real.

Definiţia XII. 5. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. O **2 – formă diferenţială** (sau 2 – formă) de clasă C^k pe A este o aplicaţie $\alpha : A \to \Lambda^2\mathbb{R}^{n'}$, de clasă C^k.

EXEMPLUL 4. Fie $A \subset \mathbb{R}^2$. Pentru o 2 – formă diferenţială de clasă C^k, $\alpha : A \to \Lambda^2\mathbb{R}^{2'}$, vom avea $\alpha(x,y) = a(x,y)\, dx\wedge dy$ (vezi exemplul 2 de mai sus), cu $a : A \to \mathbb{R}$ funcţie de clasă C^k.

EXEMPLUL 5. Fie $A \subset \mathbb{R}^3$. Pentru o 2 – formă diferenţială de clasă C^k, $\alpha : A \to \Lambda^2\mathbb{R}^{3'}$, vom avea

$$\alpha(x,y,z) = P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy$$

cu $P,Q,R : A \to \mathbb{R}$ de clasă C^k (conform exemplului 3 de mai sus).

Este evident cum se pot aduna 2 – formele de clasă C^k definite pe $A \subset \mathbb{R}^n$. Mai mult, acestea se pot înmulţi cu funcţii în mod analog cu 1 – formele. Vom nota $\Omega_k^2(A)$ mulţimea 2 – formelor de clasă C^k pe A. Dacă $\alpha,\beta \in \Omega_k^1(A)$, putem defini **produsul exterior** al formelor α şi β, $\alpha\wedge\beta \in \Omega^2_k(A)$ prin

$$(\alpha\wedge\beta)(x) = \alpha(x)\wedge\beta(x) \text{ pentru orice } x \in A.$$

În particular, dacă $U \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă şi $f,g : U \to \mathbb{R}$ sunt de clasă C^1 pe U avem

$$df\wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\wedge\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right) =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx\wedge dy = \frac{D(f,g)}{D(x,y)}dx\wedge dy,$$

folosind proprietăţile amintite ale operaţiei $\wedge$. Se poate face un calcul analog în $\mathbb{R}^3$ pe care-l lăsăm ca exerciţiu.

Definiţia XII. 6. Fie acum $U \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1 şi α o 2 – formă pe $B \supset \varphi(U)$. Se numeşte **imagine reciprocă** (sau **inversă**) a 2 – formei α prin φ, 2 – forma $\varphi^*\alpha : U \to \Lambda^2\mathbb{R}^{n'}$,

$$\varphi^*\alpha(x)(v_1,v_2) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)(v_1),d\varphi(x)(v_2)), \quad \forall\, v_1,v_2 \in \mathbb{R}^n, x \in U.$$

Se verifică cu uşurinţă că $\varphi^*\alpha$ este o 2 – formă. Dacă $\alpha \in \Omega_0^2(B)$, atunci $\varphi^*\alpha \in \Omega_0^2(A)$ şi dacă $\alpha \in \Omega_k^2(B)$, $k \geq 1$, atunci $\varphi^*\alpha \in \Omega_{k-1}^2(A)$.

De asemenea nu prezintă nici o dificultate verificarea proprietăţilor următoare:

$\varphi^*(\alpha + \beta) = \varphi^*\alpha + \varphi^*\beta$, pentru orice 2 – forme α,β

$\varphi^*(f\alpha) = (f\circ\varphi)\varphi^*\alpha$, $\forall f$ funcţie de clasă C^1, α 2 – formă

$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$, $\forall\, \alpha,\beta$ 1 – forme.

Într-un context evident avem şi

$$\varphi^*(\Psi^*\alpha) = (\Psi\circ\varphi)^*\alpha,\ \alpha \text{ 2 – formă etc.},$$

relaţie care va fi folosită în cele ce urmează.

EXEMPLUL 6. Fie $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $m = 3$, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$. Să notăm variabilele în Δ prin (u,v) şi componentele funcţiei φ cu X,Y,Z deci $\varphi(u,v) = (X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))$ şi fie $\alpha = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$ o 2 – formă pe $\varphi(\Delta)$. Avem

$$\varphi^*(\alpha) = (P\circ\varphi)\varphi^*(dy\wedge dz) + (Q\circ\varphi)\varphi^*(dz\wedge dx) + (R\circ\varphi)\varphi^*(dx\wedge dy) =$$

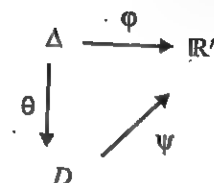
$$= P\circ\varphi\, dY\wedge dZ + Q\circ\varphi\, dZ\wedge dX + R\circ\varphi\, dX\wedge dY =$$

$$\left[P\circ\varphi\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + Q\circ\varphi\frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + R\circ\varphi\frac{D(X,Y)}{D(u,v)}\right]du\wedge dv.$$

Înainte de a studia integrarea 2 – formelor, facem cîteva precizări despre suprafeţe.

Definiţia XII. 7. O **pînză parametrizată de clasă** C^k în $\mathbb{R}^n$ este o aplicaţie de clasă C^k, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$, unde $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime **deschisă şi conexă**. Vom considera doar cazul $k \geq 1$.

Două **pînze parametrizate de clasă** C^k în $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$, se zic C^k **– echivalente** dacă există un **difeomorfism** de clasă C^k, notat $\theta : \Delta \to D$, astfel încît $\varphi = \Psi\circ\theta$, deci avem diagrama comutativă



Aplicaţia θ se numeşte **schimbare de parametri**.

O **pînză** de clasă C^k Σ este o clasă de echivalenţă de pînze parametrizate C^k **– echivalente**. Dacă $\varphi \in \Sigma$ vom spune că φ este o **parametrizare admisibilă** pentru Σ. Este clar că pentru orice pînză Σ şi $\varphi,\Psi \in \Sigma$, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$, $\Psi : D \to \mathbb{R}^n$ rezultă $\varphi(\Delta) = \Psi(D)$ deci putem vorbi despre **imaginea** unei pînze (numită şi porţiune de suprafaţă) ca o submulţime în $\mathbb{R}^n$. Dată fiind o pînză parametrizată φ ea defineşte o pînză unică, anume mulţimea pînzelor parametrizate echivalente cu φ.

EXEMPLU. Fie $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n, x^2 + y^2 < 1\}$ şi

$$\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = (x,y,\sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Pînza de clasa C^∞ definită de φ are drept imagine emisfera superioară $(z > 0)$ a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Fie $\theta : \Delta \to D$ un difeomorfism de clasă C^k, $k \geq 1$ unde $\Delta,D \subset \mathbb{R}^2$ sunt mulţimi deschise şi conexe, iar J_θ este jacobianul lui θ. Deci $J_\theta : \Delta \to \mathbb{R}$ este de clasă C^{k-1} şi nu se anulează pe Δ; cum $k - 1 \geq 0$ deducem că J_θ are semn constant pe Δ. Se spune că θ **păstrează orientarea** dacă $J_\theta > 0$ pe Δ şi **schimbă orientarea** dacă $J_\theta < 0$ pe Δ.

Se numeşte **pînză orientată, de clasă** C^k, o clasă de echivalenţă de pînze parametrizate de clasă C^k faţă de relaţia de echivalenţă "~" ($\varphi \sim \Psi$ dacă $\varphi = \Psi\circ\theta$ cu θ difeomorfism de clasă C^k ce păstrează orientarea).

Fie acum $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ o pînză parametrizată de clasă C^k, $k \geq 1$ şi α o 2 – formă diferenţială continuă pe $\varphi(\Delta)$. Fie $\varphi^*\alpha = a\,dx\wedge dy$, cu $a : \Delta \to \mathbb{R}$ continuă. Se defineşte

$$\int_\varphi \alpha = \iint_\Delta a\,dx\,dy,$$

în ipoteza că ultima integrală **există** (deci dacă $a \in L^1_\Delta$).

Definiţia XII. 8. Fie Σ o pînză orientată, de clasă C^k în $\mathbb{R}^n$ şi α o 2 – formă diferenţială continuă pe imaginea lui Σ. Se defineşte **integrala formei α pe Σ**, prin

$$\int_\Sigma \alpha = \int_\varphi \alpha\,,\ \text{pentru } \varphi \in \Sigma,$$

în ipoteza că ultima integrală există.

TEOREMA XII. 6. Definiţia de mai sus este corectă, în sensul că dacă $\varphi,\Psi \in \Sigma$ atunci

$$\int_\varphi \alpha = \int_\Sigma \alpha\,,$$

deci dacă una din integrale există, există şi cealaltă şi coincid.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$, $\Psi : D \to \mathbb{R}^n$ şi $\varphi = \Psi\circ\theta$, cu θ difeomorfism cu $J_\theta > 0$ pe Δ. Avem $\varphi^*\alpha = \theta^*(\Psi^*\alpha)$ şi fie (u,v) coordonatele în D. Să punem $\Psi^*\alpha = a\,du\wedge dv$, $a : D \to \mathbb{R}$ şi fie

$$\theta^*(\Psi^*\alpha) = a\circ\theta \frac{D(\theta_1,\theta_2)}{D(x,y)} dx\wedge dy = a\circ\theta J_\theta dx\wedge dy\,,$$

unde $\theta = (\theta_1,\theta_2)$. Deci

$$\int_\varphi \alpha = \int_\Delta a(\theta(x,y))J_\theta(x,y)dxdy$$

şi în mod similar,

$$\int_\Psi \alpha = \int_D a(u,v)dudv\,.$$

Teorema de schimbare de variabilă pentru integrale duble arată tocmai că dacă una din cele două integrale există, există şi cealaltă şi sunt egale.

EXEMPLUL 1. Fie Σ o pînză orientată, de clasă C^k, $k \ge 1$ în $\mathbb{R}^3$ şi α o 2 – formă continuă pe imaginea lui Σ. Fie $\varphi \in \Sigma$, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$,

$\varphi(u,v) = (X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))$ şi $\alpha = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$.

$$\varphi^*\alpha = \left[P\circ\varphi \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + Q\circ\varphi \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + R\circ\varphi \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}\right] du\wedge dv\,.$$

Deci

$$\int_\Sigma \alpha = \iint_\Delta \left[P\circ\varphi \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + Q\circ\varphi \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + R\circ\varphi \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}\right] dudv\,,$$

dacă ultima integrală există.

EXEMPLUL 2. Fie $X,Y : (a,b) \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 şi $\Delta = (a,b) \times \mathbb{R}$. Să considerăm

pînza parametrizată de clasă C^1 $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (X(u),Y(u),v)$. Pînza orientată definit de φ este "cilindrul" cu generatoarea paralelă cu Oz şi cu baza imaginea arcului "deschis" $u \mapsto (X(u),Y(u))$. Avem

$$\varphi^*(dy\wedge dz) = Y'du\wedge dv\,,\quad \varphi^*(dz\wedge dx) = -X'du\wedge dv \text{ şi } \varphi^*(dx\wedge dy) = 0.$$

Astfel dacă

$$\alpha = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

este o 2 – formă pe imaginea lui Σ, atunci

$$\int_\Sigma \alpha = \iint_\Delta \left[P(X(u),Y(u),v)Y'(u) - Q(X(u),Y(u),v)X'(u)\right]dudv\,.$$

În particular, dacă $P = Q = 0$, atunci $\int_\Sigma \alpha = 0$.

Fie $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată de clasă C^k, $k \ge 1$. Dacă

$$\varphi(u,v) = (X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)),$$

se defineşte **funcţia normală** (sau **cîmpul vectorilor – normală**) de-a lungul lui φ prin

$$N_\varphi(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\,,$$

unde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial X}{\partial u},\frac{\partial Y}{\partial u},\frac{\partial Z}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial X}{\partial v},\frac{\partial Y}{\partial v},\frac{\partial Z}{\partial v}\right),$$

iar "$\times$" este **produsul vectorial** în $\mathbb{R}^3$. Pînza φ se zice **simplă** dacă φ este injectivă. De asemenea φ se zice **regulată** dacă vectorii $\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sunt liniar independenţi în fiecare punct din Δ. Dacă φ este regulată, atunci $N_\varphi \ne 0$ pe Δ. Să vedem cum se modifică N_φ la o schimbare de parametri. Fie $\varphi = \Psi\circ\theta$, $\varphi(u,v) = \Psi(\theta_1(u,v),\theta_2(u,v))$ şi $u_1 = \theta_1(u,v)$, $v_1 = \theta_2(u,v)$. Atunci

$$N_\varphi(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + \frac{\partial\Psi}{\partial v_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)\times\left(\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \frac{\partial\Psi}{\partial v_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right) =$$

$$= J_\theta(u,v)N_\Psi(\theta(u,v))\,.$$

Mai scurt, $N_\varphi = J_\theta N_\Psi$, într-un sens evident.

Deducem că dacă $J_\theta > 0$, atunci N_φ şi N_Ψ sunt vectori cu aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, în punctele corespunzătoare. Dacă φ este o pînză **simplă** şi **regulată**, atunci versorul $n_\varphi(u,v) = \dfrac{N_\varphi(u,v)}{\|N_\varphi(u,v)\|}$ (numit şi **normala unitară**

în punctele imagine) este invariant la schimbări de parametri ce păstrează orientarea, deci **caracterizează** o pînză **simplă** şi **regulată**.

Definiţia XII. 9. Fie Σ o pînză de clasă C^1 în $\mathbb{R}^3$. Se defineşte **aria** pînzei Σ prin

$$a(\Sigma) = \iint_\Delta \| N_\varphi(u,v) \| \, du dv ,$$

pentru o parametrizare $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\varphi \in \Sigma$, dacă integrala există. Se verifică imediat că $a(\Sigma)$ este bine definită (nu depinde de parametrizarea $\varphi \in \Sigma$ aleasă). Dacă

$$\varphi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)),$$

atunci se arată uşor că

$$N_\varphi(u,v) = \left(\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}(u,v), \frac{D(Z,X)}{D(u,v)}(u,v), \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}(u,v) \right)$$

sau, cu notaţii tradiţionale

$$\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} = A, \quad \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} = B, \quad \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} = C, \quad N_\varphi = (A,B,C).$$

Deducem $\|N_\varphi\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$, deci

$$a(\Sigma) = \iint_\Delta \sqrt{A^2+B^2+C^2} \, du dv .$$

Vom încheia această lecţie cu interpretarea integralei de suprafaţă, în limbaj de teoria cîmpului. Fie Σ o pînză orientată în $\mathbb{R}^3$, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\varphi \in \Sigma$ şi α o 2 – formă pe imaginea lui Σ. Avem

$$\alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

şi putem asocia cîmpul de vectori $V = (P,Q,R)$.

$$\int_\Sigma \alpha = \iint_\Delta \left[P\circ\varphi \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + Q\circ\varphi \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + R\circ\varphi \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} \right] du dv = \iint_\Delta (V\circ\varphi) \cdot N_\varphi \, du dv .$$

(Aici $(V\circ\varphi)\cdot N_\varphi$ reprezintă produsul scalar euclidian). Mai departe, dacă $N_\varphi \neq 0$, atunci avem

$$\int_\Sigma \alpha = \iint_\Delta V\circ\varphi \frac{N_\varphi}{\|N_\varphi\|} \|N_\varphi\| \, du dv = \iint_\Delta V\circ\varphi \, n_\varphi \, d\sigma$$

unde $d\sigma = \|N_\varphi\| du dv$ se numeşte **element de arie** (şi reprezintă evident o notaţie sugestivă).

Sub forma $\iint_\Delta V \cdot n \, d\sigma$, integrala de suprafaţă poartă numele de **fluxul cîmpului** V prin porţiunea de suprafaţă Σ. Această noţiune extinde pe cea de debit şi pe cea de flux termic.

3. 10 exerciţii

1. Fie γ arcul orientat definit în $\mathbb{R}^3$ de drumul parametrizat $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (1 + \cos 2t, \sin 2t, 2\cos t)$. Să se arate că imaginea arcului γ se află pe o sferă şi pe un cilindru şi să se calculeze $I = \int_\gamma (x^2+y^2) dz$.

2. Să se calculeze $\int_\gamma (x^2+y^2) dx + 2xy \, dy$, unde γ este un arc închis în $\mathbb{R}^2$.

3. Se consideră 1 – forma $\alpha = \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$, pe $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Calculaţi $\int_\gamma \alpha$, unde γ este cercul $x^2 + y^2 = R^2$ parcurs în sens direct o singură dată. Arătaţi că deşi α verifică pe $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ condiţia din teorema Poincaré, totuşi nu este exactă (adică nu este de tip df).

4. Determinaţi primitivele 1 – formei $\alpha = (2x\cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ pe $\mathbb{R}^2$.

5. Să se calculeze $I = \int_\gamma \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$ unde γ este arcul ce are ca imagine porţiunea de curbă $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, cuprinsă între punctele $A = (a,0)$ şi $B = (0,a)$, parcursă o singură dată de la A la B.

6. Să se afle aria pînzei obţinută prin secţionarea paraboloidului $z = xy$, $x > 0$, $y > 0$, cu cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$.

7. Fie pînza Σ dată de pînza parametrizată

$$x(\theta,\varphi) = r(\theta,\varphi)\sin\theta\cos\varphi$$
$$y(\theta,\varphi) = r(\theta,\varphi)\sin\theta\sin\varphi$$
$$z(\theta,\varphi) = r(\theta,\varphi)\cos\theta$$

$0 < \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $r(\theta,\varphi) > 0$. Să se deducă formula

$$a(\Sigma) = \iint\limits_{\substack{0<\theta\le\pi\\0<\varphi\le 2\pi}} \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + r^2\sin\theta}\; r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi .$$

8. Folosind formula exerciţiului 7 să se determine o pînză parametrizată cu imaginea $S = \{(x,y,z)\ ;\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy,\ x,y > 0\}$ şi să se calculeze aria elementului de suprafaţă respectiv.

9. Să se calculeze $\int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ unde Σ este pînza orientată corespunzător feţei exterioare a elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

10. 1) Fie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un drum parametrizat de clasă C^1 şi f o funcţie reală continuă pe imaginea lui φ. Se defineşte $\int\limits_{\varphi} f\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\,\|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t$. Calculaţi $\int\limits_{\varphi} f\mathrm{d}s$ dacă $\varphi(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$, $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x,y) = xy$.

2) Dacă $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ este o pînză parametrizată de clasă C^1 şi f o funcţie reală pe imaginea lui φ, se defineşte $\int\limits_{\varphi} f\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Delta} f\circ g\,\|N_\varphi\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ (dacă ultima integrală există).

Să se calculeze $\int\limits_{\varphi} f\mathrm{d}\sigma$, dacă $f(x,y,z) = y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2$ şi φ are ca imagine partea din conul $z^2 = x^2 + y^2$, $z > 0$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 < 2ax$, $a > 0$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Pe imaginea lui γ (pentru $x = 1 + \cos 2t$, $y = \sin 2t$, $z = 2\cos t$) avem

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1 + \cos 2t)^2 + \sin^2 2t + 4\cos^2 t = 4(1 + \cos 2t) = 4x,$$
$$x^2 + y^2 = (1 + \cos 2t)^2 + \sin^2 2t = 2x.$$

Deci imaginea arcului γ se află pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ şi pe cilindrul $x^2 + y^2 = 2x$. Avem $I = \int\limits_0^{2\pi} 2(1 + \cos 2t)(-2\sin t)\mathrm{d}t$ (formal $\mathrm{d}z = -2\sin t\,\mathrm{d}t$). Deci $I = -8\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = 0$.

2. Avem pentru $P = x^2 + y^2$, $Q = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $\mathbb{R}^2$. Cum $\mathbb{R}^2$ este stelat (de exemplu

în raport cu 0) şi γ este închis, vom avea conform teoremei lui Poincaré

$$\int\limits_{\gamma} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0 .$$

3. Parametrizăm cercul $x^2 + y^2 = R^2$ prin $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0,2\pi]$. Este parametrizarea care defineşte arcul γ cerut în integrare. Avem

$$\int\limits_{\gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{R^2}\mathrm{d}t = 2\pi .$$

Se verifică uşor că forma $\alpha = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ verifică pe $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ condiţiile din teorema lui Poincaré. Forma α nu este exactă căci integrala formei pe arcul închis γ nu este nulă.

4. Pentru $\alpha = (2x\cos y - y^2\sin x)\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y$ avem

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y\cos x - x^2\sin y) = -2y\sin x - 2x\sin y = \frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y - y^2\sin x).$$

Deci α admite primitive pe mulţimea stelată $\mathbb{R}^2$. Putem calcula o astfel de primitivă folosind formula:

$$f(x,y) = \int\limits_0^1 [(2tx\cos ty - t^2y^2\sin tx)x + (2ty\cos tx - t^2x^2\sin ty)y]\,\mathrm{d}t = x^2\cos y + y^2\cos x .$$

5. O parametrizare admisibilă pentru γ este $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0,\pi/2]$. După calcule se obţine $I = \frac{3}{16}\pi a^{4/3}$.

6. Parametrizarea este $(x,y) \mapsto (x,y,xy)$ pentru $x,y > 0$, $x^2 + y^2 < R^2$. Se arată imediat că în cazul parametrizării de tip $(x,y,f(x,y))$, $(x,y) \in D$ aria se obţine cu ajutorul formulei

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

În cazul de faţă

$$S = \iint\limits_{\substack{x,y>0\\x^2+y^2<R^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y ;$$

se trece la coordonate polare $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ şi se obţine

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^R r\sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^R r\sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1\right].$$

8. Să trecem în coordonate sferice $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Ecuaţia

mulțimii S devine $r^4 = 2a^2r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ deci $0 < \theta \leq \pi$, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ de

unde $r(\theta,\varphi) = a\sin\theta\sqrt{\sin^2\varphi}$. Se utilizează formula din exercițiul 7 și se obține valoarea $\frac{\pi^2a^2}{2}$.

9. Se parametrizează Σ $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = b\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\cos\theta$, $0 < \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Se arată cu ușurință că normala "corespunzătoare" acestei parametrizări este normala exterioară

$$\int_\Sigma dx \wedge dy = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{D(X,Y)}{D(\theta,\varphi)} d\theta\, d\varphi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} ab\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

10. 1) $\varphi'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$; $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Avem

$$\int_\varphi f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = \frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

(se poate face schimbarea de variabilă $a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = u^2$ etc.).

2) O parametrizare admisibilă este $z = \sqrt{x^2+y^2}$, (x,y) în interiorul cercului $x^2 + y^2 = 2ax$, $\|N\| = \sqrt{2}$ etc.

LECȚIA A XIII-A

FORMULE INTEGRALE, ELEMENTE DE TEORIA CÎMPULUI

INTRODUCERE

În această lecție se prezintă formulele integrale clasice care stabilesc legături între integralele curbilinii, duble, de suprafață sau de volum – formulele Green – Riemann, Gauss – Ostrogradski, Stokes, numite generic **stokiene**. Ne-am limitat la cazurile suprafețelor cu bord și compacților cu bord în $\mathbb{R}^3$, suficiente pentru aplicații. O dată cu deducerea unor consecințe remarcabile, se interpretează rezultatele obținute în limbajul teoriei cîmpului, folosit în mod curent în inginerie.

1. Formula Green – Riemann

Un drum $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se zice C^1 **pe porțiuni** dacă există o diviziune a intervalului $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, astfel încît restricția aplicației φ la fiecare interval $[t_{i-1},t_i]$, $i = 1,...,n$ să fie de clasă C^1 și φ este continuă pe întreg $[a,b]$. Diviziunea se zice **admisibilă**. Rezultă că în punctele de diviziune **interioare** intervalului $[a,b]$ există derivatele laterale ale aplicației φ. Punctele în care aceste derivate laterale sunt diferite sunt puncte unghiulare. Dacă $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este un drum C^1 pe porțiuni și α este o 1 – formă (continuă pe imaginea drumului), atunci definim $\int_\varphi \alpha$ luînd o diviziune admisibilă $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ și punînd

$$\int_\varphi \alpha = \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi_i} \alpha,$$

unde $\varphi_i : [t_{i-1},t_i] \to \mathbb{R}^n$ este restricția aplicației φ la intervalul $[t_{i-1},t_i]$. Se arată ușor că această definiție este corectă, în sensul independenței de diviziunea admisibilă folosită. În plus, pentru drumuri de clasă C^1 (care evident pot fi considerate C^1 – pe porțiuni), integrala coincide cu cea definită anterior (în lecția a XII-a).

Se introduc în mod natural noţiunile de arc C^1 – pe porţiuni şi arc orientat C^1 pe porţiuni cu ajutorul relaţiilor de echivalenţă definite de difeomorfisme de clasă C^1 (respectiv difeomorfisme de clasă C^1 ce păstrează orientarea), ca în lecţia precedentă. Se arată că dacă γ este un arc orientat C^1 pe porţiuni şi α este o 1 – formă continuă pe imaginea arcului atunci este bine definită integrala curbilinie $\int_\gamma \alpha$.

Fie acum M o varietate de clasă C^1 şi de dimensiune 1 în $\mathbb{R}^2$ (M se mai numeşte **curbă** de clasă C^1). Din definiţia varietăţii, deducem că pentru fiecare punct $(x_0,y_0) \in M$ există un drum de clasă C^1, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ cu $\varphi'(t) \neq 0$ pe $[a,b]$, $t_0 \in (a,b)$ cu $\varphi(t_0) = (x_0,y_0)$ şi o vecinătate U a lui (x_0,y_0) (în $\mathbb{R}^2$) aşa încît $M \cap U$ să fie imaginea drumului φ. Pe scurt, M este local imaginea unui drum C^1.

Din teorema funcţiilor implicite rezultă totodată că în vecinătatea oricărui punct $(x_0,y_0) \in M$, M poate fi descrisă de o ecuaţie $y = \varphi(x)$ sau $x = \psi(y)$ cu φ (respectiv ψ) de clasă C^1, deci M este graficul unei funcţii. De aici rezultă că în jurul fiecărui punct $(x_0,y_0) \in M$, M împarte planul în două "părţi" anume, de exemplu, în punctele cu $y < \varphi(x)$ şi respectiv în punctele cu $y \geq \varphi(x)$. Nu vom demonstra în detaliu acest fapt intuitiv clar (fig. XIII. 1).

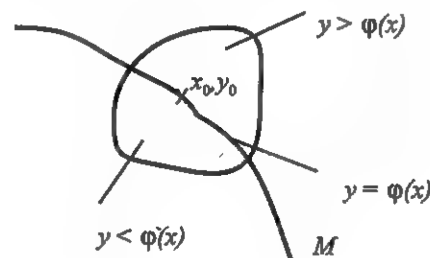


Fig. XIII. 1.

O mulţime compactă $L \subset \mathbb{R}^2$ se zice **curbă C^1 pe porţiuni** dacă fiecare punct $(x_0,y_0) \in L$ are o vecinătate $U \subset \mathbb{R}^2$, aşa încît $L \cap U$ să fie imaginea (în U) a unui drum C^1 – pe porţiuni $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, unde φ este injectivă şi derivata nenulă pe orice interval închis pe care φ este C^1. Punctele unghiulare ale curbei L se definesc în mod natural, sunt izolate şi, cum L este compactă, în număr finit. Punctele din L care nu sunt unghiulare se zic **puncte ordinare** pentru L. Mulţimea punctelor ordinare ale curbei L formează o curbă de clasă C^1.

Definiţia XIII. 1. O mulţime compactă $K \subset \mathbb{R}^2$ se zice **compact cu bord** dacă:

i) Frontiera ∂K a lui K este o curbă C^1 pe porţiuni.

ii) Pentru orice punct ordinar $(x_0,y_0) \in \partial K$, există o vecinătate a lui (x_0,y_0) pe care ∂K o împarte în două mulţimi conexe, numite componente – una formată din puncte **interioare** lui K cealaltă din puncte **exterioare**.

Frontiera ∂K va fi numită şi **bord** al compactului cu bord K. Vom "orienta" în cele ce urmează bordul unui compact cu bord. Dacă $(x_0,y_0) \in \partial K$ este un punct ordinar al lui ∂K, ∂K este în vecinătatea lui (x_0,y_0) imaginea unui arc şi K se află de o singură parte a bordului ∂K. Vom alege orientarea arcului (transformîndu-l în arc orientat) astfel încît K să rămînă la stînga cînd imaginea arcului este parcursă în "sensul" orientării (fig. XIII. 2); intuitiv, dacă "parcurgem ∂K, mîna stîngă cade" în interiorul lui K.

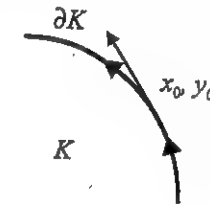


Fig. XIII. 2.

Comentariu. Desigur acest mod de exprimare nu este riguros. Îl putem preciza de exemplu punînd condiţia ca pentru un drum φ ce reprezintă arcul orientat de imagine ∂K în vecinătatea lui (x_0,y_0) cu $\varphi(t_0) = (x_0,y_0)$, vectorul $\varphi'(t_0)$ rotit cu $\pi/2$ în sens invers acelor ceasornicului devenit astfel normal la curbă, să fie îndreptat spre interiorul lui K. Evident, nici această a doua formulare nu este în totalitate riguroasă. Pentru a o îmbunătăţi, sunt necesare unele amănunte. Anume este necesară noţiunea de **orientare** a unui spaţiu vectorial real: dacă $\{e_1,\ldots,e_n\}$ şi $\{f_1,\ldots,f_n\}$ sunt două baze ordonate ale unui spaţiu vectorial de dimensiune n, ele se zic echivalente dacă trecerea de la una la alta se face printr-un izomorfism liniar cu determinant strict pozitiv, o orientare a spaţiului fiind o clasă de echivalenţă de baze orientate **echivalente**. Spaţiul $\mathbb{R}^2$ se consideră ordonat de baza ordonată $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$. Se defineşte vectorul normală exterioară la ∂K în orice punct ordinar (x_0,y_0) şi se pune condiţia ca vectorii: normală exterioară şi tangenta în (x_0,y_0), în această ordine, să formeze o bază echivalentă cu $\mathcal{B}$.

Vom numi **compact cu bord orientat** un compact cu bord, pentru care bordul are orientarea mai sus descrisă. Triunghiurile, dreptunghiurile (ca "plăci"), discurile închise, interiorul elipselor împreună cu frontiera etc., sunt exemple de compacţi cu bord orientat.

Bordul unui compact cu bord orientat este o reuniune finită de imagini de arce orientate C^1 pe porţiuni, avînd eventual doar extremităţi în comun. Rezultă că este bine definită integrala unei 1 – forme, pe bordul unui compact cu bord orientat.

Fie $\alpha = Pdx + Qdy$ o 1 – formă de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^2$. Definim **diferenţiala** ei

$$d\alpha = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy .$$

Se observă că $d\alpha$ este o 2 – formă continuă pe A.

Fie acum $\theta : A \to B$ **un difeomorfism** de clasă C^2 între mulţimile deschise $A, B \subset \mathbb{R}^2$. Atunci pentru orice 1 – formă α de clasă C^1 pe B, avem $\theta^*(d\alpha) = d(\theta^*\alpha)$. În adevăr, fie (x,y) variabilele pe A şi (u,v) variabilele pe B. şi scriem $\theta(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Fie $\alpha = Pdx + Qdy$ o 1 – formă de clasa C^1 pe B. Avem

$$\theta^*\alpha = P\circ\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + Q\circ\theta\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(P\circ\theta\frac{\partial u}{\partial x} + Q\circ\theta\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(P\circ\theta\frac{\partial u}{\partial y} + Q\circ\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \text{ şi deci}$$

$$d(\theta^*\alpha) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(P\circ\theta\frac{\partial u}{\partial y} + Q\circ\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P\circ\theta\frac{\partial u}{\partial x} + Q\circ\theta\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dx \wedge dy =$$

$$\left[\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + P\circ\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + Q\circ\theta\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - P\circ\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} - Q\circ\theta\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right]dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\circ\theta - \frac{\partial P}{\partial v}\circ\theta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\circ\theta - \frac{\partial P}{\partial v}\circ\theta\right)\frac{D(u,v)}{D(x,y)}dx \wedge dy, \text{ iar}$$

$$\theta^*(d\alpha) = \theta^*\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)du \wedge dv\right] = \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\circ\theta - \frac{\partial P}{\partial v}\circ\theta\right)\frac{D(u,v)}{D(x,y)}dx \wedge dy$$

(am folosit o formulă stabilită în lecţia precedentă). Deci într-adevăr,

$$d(\theta^*\alpha) = \theta^*(d\alpha).$$

Putem formula acum teorema fundamentală a acestui paragraf.

TEOREMA XIII. 1. (G. GREEN, 1793 – 1841, B. RIEMANN, 1826 – 1866). Fie $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact, cu bord orientat şi α o 1 – formă de clasă C^1 în vecinătatea lui K. Atunci

$$\boxed{\iint_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha} \quad \textbf{(formula Green – Riemann).}$$

Pentru a lămuri enunţul, să considerăm $\alpha = Pdx + Qdy$. Atunci

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy .$$

Conform definiţiilor generale,

$$\iint_K d\alpha = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

(deschişii în plan se "parametrizează prin aplicaţia identică", iar 2 – forma ca şi integrala se restrîng la K). Deci în definitiv, putem scrie formula Green – Riemann în forma

$$\boxed{\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{\partial K} P\,dx + Q\,dy},$$

pentru orice două funcţii P, Q de clasă C^1 pe un deschis din plan care conţine K.

Comentariu. În teoremă apare o "dualitate" compact $\leftrightarrow$ bord şi 1 – formă $\leftrightarrow$ diferenţiala sa, anume

$$K \leftrightarrow \partial K$$
$$d\alpha \leftrightarrow \alpha$$

Această dualitate pe care o vom regăsi şi ulterior se caracterizează prin legătura dată de formula Green – Riemann. Acest fenomen a mai fost întîlnit în cazul formulei Leibnitz – Newton: interpretînd un interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ca un compact cu bordul $\{b\} - \{a\}$ (bord orientat) atunci dacă o 0 – formă f (o funcţie) de clasă C^1 avem $\int_a^b f'dt = f(b) - f(a)$ deci o formulă de tip Green – Riemann, unde integrala pe bord se interpretează ca integrală în raport cu măsura Dirac concentrată în punctele respective şi cu semnul dat de orientare.

Vom demonstra teorema în mai multe etape. Ideea principală a demonstraţiei constă în demonstrarea teoremei pe compacţi cu bord suficient de "simpli" şi de a reduce cazul general la cazul compacţilor simpli prin tehnica numită "partiţia unităţii".

LEMA 1. Fie $K = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le \varphi(x)\}$, unde $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1, $\varphi > 0$. Atunci K este în mod natural un compact cu bord orientat şi are loc formula Green – Riemann pe K.

DEMONSTRAŢIE. Bordul ∂K este format din arcele orientate $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ (pe care a fost însemnată orientarea). Fie $\alpha = Pdx + Qdy$ o 1 – formă diferenţială de clasă C^1 în vecinătatea lui K.

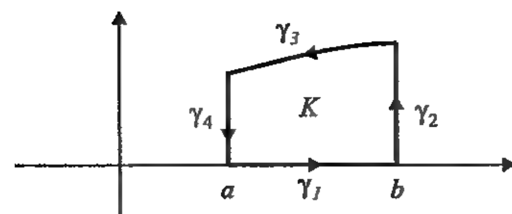


Fig. XIII. 3.

Avem

$$\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_0^{\varphi(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b [P(x,\varphi(x)) - P(x,0)]\,\mathrm{d}x = -\int_{\gamma_1} P\mathrm{d}x - \int_{\gamma_3} P\mathrm{d}x .$$

Deci $-\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial K} P\mathrm{d}x$, căci evident $\int_{\gamma_2} P\mathrm{d}x = \int_{\gamma_4} P\mathrm{d}x = 0$. Vom arăta că

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial K} Q\mathrm{d}y .$$

Să definim $U(x,y) = \int_0^y Q(x,\eta)\mathrm{d}\eta$. Avem $\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,\eta)\mathrm{d}\eta$ şi $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$.

Deducem $\int_{\partial K}\mathrm{d}U = 0 = \int_{\partial K}\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y$ deci $\int_{\partial K}\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x = -\int_{\partial K}\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y = -\int_{\partial K} Q\mathrm{d}y$. Dar $\int_{\partial K}\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x = -\iint_K \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, aşa cum am arătat deja. Este clar că

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}\eta\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ şi astfel } \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x y = \int_{\partial K} Q\mathrm{d}y .$$

Lema este demonstrată.

LEMA 2. Fie $\theta : A \to B$ un difeomorfism de clasă C^2 ce păstrează orientarea între deschişii $A,B \subset \mathbb{R}^2$ şi K un compact cu bord orientat în A. Dacă formula Green – Riemann este adevărată pentru $L = \theta(K)$, atunci este adevărată şi pentru K.

DEMONSTRAŢIE. Fie α o 1 – formă de clasă C^1 în vecinătatea lui K. Există o 1 – formă de clasă C^1 β în vecimătatea lui L astfel încît $\alpha = \theta^*\beta$ (θ este

difeomorfism de clasă C^2). Cum bordurile ∂K şi ∂L se corespund prin θ, avem evident $\int_{\partial K}\theta^*\beta = \int_{\partial L}\beta = \iint_L \mathrm{d}\beta = \iint_K \theta^*(\mathrm{d}\beta) = \iint_K \mathrm{d}(\theta^*\beta)$ deci $\int_{\partial K}\alpha = \iint_K \mathrm{d}\alpha$, ceea ce era de dovedit. În şirul de egalităţi de mai sus, relaţia $\iint_L \mathrm{d}\beta = \iint_K \theta^*(\mathrm{d}\beta)$ este tocmai teorema de schimbare de variabilă (sau independenţa integralei de suprafaţă de parametrizarea în clasa de orientare), iar $\iint_K \theta^*(\mathrm{d}\beta) = \iint_K \mathrm{d}(\theta^*\beta)$ rezultă din relaţia $\theta^*(\mathrm{d}\beta) = \mathrm{d}(\theta^*)$, stabilită înaintea enunţului teoremei.

Comentariu. Cu aceeaşi demonstraţie ca în lema 1, formula Green – Riemann are loc pentru "integrafice proiectabile pe Ox", de forma $K = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, cu $\varphi,\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1, $\varphi < \psi$. În cazul special cînd K este o reuniune finită de m integrafice proiectabile pe Ox, cu porţiuni comune de frontieră parcurse în sensuri opuse (ca în fig. XIII. 4. a), unde $m = 3$ rezultă $\int_{\partial K}\alpha = \sum_{i=1}^{m}\int_{\partial K_i}\alpha = \sum_{i=1}^{m}\iint_{K_i}\mathrm{d}\alpha = \int_K \mathrm{d}\alpha$. Acest caz este suficient în multe aplicaţii. În cazul general, ideea demonstraţiei teoremei XIII. 1 se precizează astfel (fig. XIII. 4. b).

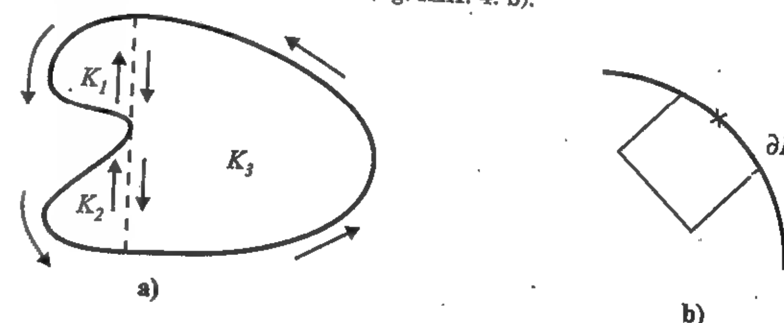


Fig. XIII. 4.

Fie K un compact cu bord orientat. Plasăm "figuri" ca în lema 1, eventual rotite, în fiecare punct al bordului lui K; pentru aceste "figuri" are loc formula Green – Riemann (conform lemelor 1 şi 2). Printr-un procedeu de lipire, vom deduce formula pentru K.

LEMA 3. Fie $r,\varepsilon > 0$. Există o funcţie ψ de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$ astfel încît $\psi(t) = 1$ pentru $|t| \le r$ şi $\psi(t) = 0$, pentru $|t| \ge r + \varepsilon$ şi $0 \le \psi(t) \le 1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAŢIE. Funcţia $\rho(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$ este de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$, după cum se

poate verifica cu uşurinţă. Funcţia $\rho_\varepsilon(t) = \dfrac{\rho(t)}{\rho(t) + \rho(\varepsilon - t)}$ este de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$, $0 \le \rho_\varepsilon \le 1$ şi $\rho_\varepsilon(t) = 0$ pentru $t \le 0$ şi $\rho(t) = 1$ pentru $t \ge \varepsilon$. Să definim funcţia $\psi(t) = 1 - \rho_\varepsilon(|t| - r)$. Se verifică uşor că ψ este de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$. În plus, $\psi(t) = 1$ dacă $|t| \le r$, $\psi(t) = 0$ pentru $|t| \ge r + \varepsilon$ şi în mod clar $0 \le \psi \le 1$. Graficul funcţiei ψ este reprezentat în fig. XIII. 5.

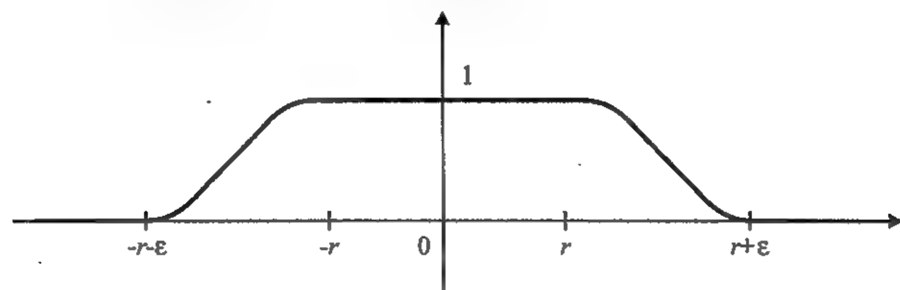


Fig. XIII. 5.

Să observăm că funcţia $\Phi(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ este de clasa C^∞ pe $\mathbb{R}^2$, $0 \le \Phi \le 1$, $\Phi(x,y) = 1$ pe pătratul $[-r,r] \times [-r,r]$ şi $\psi(x,y) = 0$ în exteriorul pătratului $[-r-\varepsilon, r+\varepsilon] \times [-r-\varepsilon, r+\varepsilon]$.

DEMONSTRAŢIA TEOREMEI XIII. 1. Fie K un compact cu bord orientat, ∂K bordul lui K şi α ca în enunţul teoremei. Pentru fiecare punct $(x_0,y_0) \in K$ vom considera pătrate centrate în (x_0,y_0), după cum urmează: dacă $(x_0,y_0) \notin \partial K$ (deci (x_0,y_0) este interior lui K) considerăm două pătrate cu laturile paralele cu axele, centrate în (x_0,y_0), conţinute în $\mathring{K}$ (fig. XIII. 6), iar dacă $(x_0,y_0) \in \partial K$ şi este un punct ordinar, considerăm pătrate centrate în (x_0,y_0) cu laturile paralele cu tangenta respectiv normala la ∂K în (x_0,y_0) (fig. XIII. 7), aşa încît local ∂K să fie dată de (să zicem) $y = \varphi(x)$ şi graficul lui φ să fie ca în figură; în fine, dacă (x_0,y_0) este un punct unghiular, se aleg pătrate centrate în (x_0,y_0) cu laturile paralele cu bisectoarea unghiului făcut de tangentele "laterale" în (x_0,y_0) şi cu perpendiculare în (x_0,y_0) pe aceste bisectoare şi suficient de mici (fig. XIII. 8).

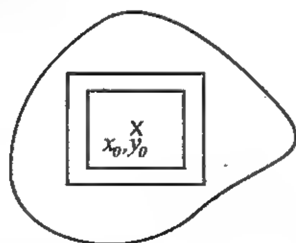


Fig. XIII. 6.

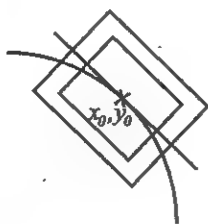


Fig. XIII. 7.

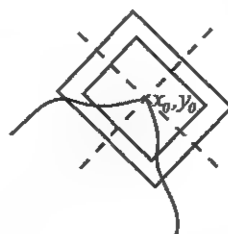


Fig. XIII. 8.

În acest mod, se obţine o familie de pătrate concentrice $(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)})_{(x,y)\in K}$ de felul celei de mai sus $P_{(x,y)} \subset Q_{(x,y)}$. K fiind compactă, există o familie finită de pătrate $(P_{(x_i,y_i)}, Q_{(x_i,y_i)})_{i=1,\dots,n}$ astfel încît interioarele pătratelor P_{x_i,y_i} acoperă K. Asociem fiecărui cuplu de pătrate $P_{(x_i,y_i)} \subset Q_{(x_i,y_i)}$ cîte o funcţie Φ_i ca în finalul demonstraţiei lemei 3 deci $\Phi_i = 1$ pe $P_{(x_i,y_i)}$ şi 0 în afara pătratelor $Q_{(x_i,y_i)}$, $0 \le \Phi_i \le 1$ şi Φ_i de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}^2$ (ceea ce este evident posibil). Funcţiile

$$\lambda_i = \frac{\Phi_i}{\Phi_1 + \dots + \Phi_n}$$

sunt de clasă C^∞ în vecinătatea lui K, $0 \le \lambda_i \le 1$, $\lambda_i = 0$ în afara pătratului $Q_{(x_i,y_i)}$, pentru orice i şi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ pe $P_{(x_i,y_i)} \cup \dots \cup P_{(x_i,y_i)}$ (deci şi pe K). (Se zice că $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ formează o **partiţie a unităţii**). Pentru fiecare $i = 1,\dots,n$ punem $\alpha_i = \lambda_i\alpha$ şi $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Alegînd pătratele descompunerii suficient de mici, putem presupune că α_i sunt 1 – forme de clasă C^1 în vecinătatea lui K.

Formula Green – Riemann va rezulta din ce vom obţine pentru fiecare α_i. Pentru pătratele ce corespund punctelor interioare în K, conform lemelor 1 şi 2 se poate aplica formula Green – Riemann şi avem $\iint_{Q_{(x_i,y_i)}} d\alpha_i = \int_{\partial Q_{(x_i,y_i)}} \alpha_i = 0$ şi avînd în vedere că α este nulă în exteriorul şi pe frontiera lui Q. Dacă avem un punct $(x_i,y_i) \in \partial K$, din nou cu lemele 1 şi 2 avem pentru $K_i = Q_{(x_i,y_i)} \cap K$,

$$\int_{\partial K_i} \alpha_i = \int_{\partial K} \alpha_i = \iint_{K_i} d\alpha_i = \iint_{K} d\alpha_i,$$

deoarece α_i este nulă în exteriorul şi pe frontiera lui $Q_{(x_i,y_i)}$. Deci formula Green – Riemann are loc pentru orice α_i, deci pentru α.

EXEMPLU. Fie K un compact cu bord orientat (în $\mathbb{R}^2$). Aplicînd formula Green – Riemann 1 – formelor $x dy$ şi $y dx$, obţinem

$$\int_{\partial K} x\,dy = \iint_K dx\,dy = \text{aria}(K), \quad \int_{\partial K} y\,dx = -\iint_K dx\,dy = -\text{aria}(K),$$

de unde formula pentru calculul ariei lui K, printr-o integrală curbilinie:

$$\boxed{\text{aria}K = \frac{1}{2}\int_{\partial K} x\,dy - y\,dx}.$$

De exemplu, în cazul unui disc $K = \{x^2 + y^2 \le R^2\}$, considerăm parametrizarea $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ cu $t \in [0,2\pi]$, pentru ∂K şi rezultă

$$x\,dy - y\,dx = (R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)\,dt, \text{ deci aria}K = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 dt = \pi R^2.$$

Vom aplica în cele ce urmează formula Green – Riemann pentru cazul funcţiilor olomorfe.

Fie $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă, unde $A \subset \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă nevidă, $f = u + iv$, unde $u = \text{Re}f$, $v = \text{Im}f$ şi fie $z = x + iy$ variabila complexă. Definim 1 – forma $f(z)dz$ ca fiind $f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(udy + vdx)$, deci în fond $f(z)dz$ se poate identifica cu perechea de 1 – forme reale $(udx - vdy,\ udy + vdx)$. Pentru orice arc orientat γ de clasă C^1 (pe porţiuni), cu imaginea conţinută în A, se defineşte **integrala curbilinie complexă**

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx.$$

O funcţie $f : A \to \mathbb{C}$ se zice **olomorfă** pe A (vezi lecţia a V–a) dacă pentru orice $z_0 \in A$ există (în $\mathbb{C}$), limita

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

notată $f'(z_0)$. Notînd $z - z_0 = h$, rezultă

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Luînd h real ($h \to 0$), deducem imediat că

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0), \text{ unde } z_0 = x_0 + iy_0.$$

Luînd h de forma $h = ik$, k real ($k \to 0$), obţinem

$$if'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Rezultă că au loc relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Am demonstrat astfel

TEOREMA XIII. 2. Dacă f este o funcţie olomorfă pe un deschis $A \subset \mathbb{C}$, $f = u + iv$, atunci sunt verificate condiţiile

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}, \text{ în fiecare punct din } A.$$

Aceste ecuaţii se numesc **ecuaţiile (condiţiile) Cauchy – Riemann**. Demonstrăm acum trei dintre rezultatele principale ale Analizei complexe.

TEOREMA XIII. 3. (Formula lui Cauchy). Fie K un compact cu bord orientat în $\mathbb{C}$ şi f o funcţie olomorfă (de clasă C^1) în vecinătatea lui K. Atunci

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0.$$

DEMONSTRAŢIE. Să observăm că s-a pus condiţia f de clasă C^1 în paranteză pentru că se poate demonstra că dacă f este olomorfă atunci rezultă de clasă C^1. Fără a intra în aceste detalii, vom presupune că f este de clasă C^1 şi fie $f = u + iv$. Atunci

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = \int_{\partial K} u\,dx - v\,dy + i\int_{\partial K} u\,dy + v\,dx.$$

Dar

$$\int_{\partial K} u\,dx - v\,dy = \iint_K\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy = 0 \text{ şi la fel, } \int_{\partial K} u\,dy + v\,dx = 0$$

folosind formula lui Green – Riemann şi condiţiile Cauchy – Riemann. În definitiv,

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0.$$

TEOREMA XIII. 4. (formula integrală a lui Cauchy). Fie K un compact cu bord orientat în $\mathbb{C}$ şi f o funcţie olomorfă (de clasă C^1) în vecinătatea lui K. Pentru orice $z_0 \in \mathring{K}$ (interiorul lui K) avem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

DEMONSTRAŢIE. Alegem $r > 0$ astfel încît discul închis $\{z;\ |z - z_0| \le r\}$ să fie conţinut în $\mathring{K}$. Să notăm $K_r = \{z \in K;\ |z - z_0| \ge r\}$. K_r este un compact cu bord orientat, bordul lui K_r compunîndu-se din bordul ∂K al lui K reunit cu cercul $|z - z_0| = r$ orientat în sensul acelor ceasornicului (fig. XIII. 9).

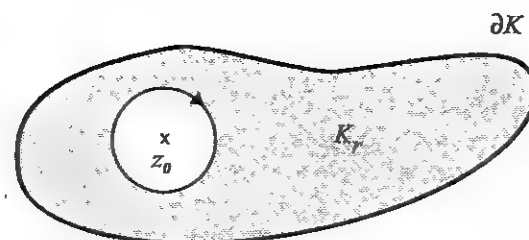


Fig. XIII. 9.

Funcţia $\frac{f(z)}{z-z_0}$ este olomorfă în vecinătatea compactului K_r (cît de funcţii olomorfe), căci $z_0 \notin K_r$. Aplicînd formula lui Cauchy, deducem

$$\int_{\partial K_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Deci

$$0 = \int_{\partial K_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

unde γ_r este arcul orientat ce rezultă din parametrizarea $t \mapsto z_0 + e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ a cercului $|z - z_0| = r$. În definitiv

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Pentru calculul $\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ observăm că în general dacă $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ este un drum parametrizat de clasa C^1, avem

$$\int_{\varphi} g(z)\,dz = \int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Deci

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt;$$

Facem acum $r \to 0$ şi obţinem la limită,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0),$$

deci formula integrală Cauchy.

Ca o aplicaţie a formulei integrale Cauchy, să arătăm că **orice funcţie olomorfă (de clasă C^1) este local suma unei serii de puteri (deci este analitică) şi în particular de clasă** C^∞. Acest rezultat este în profund contrast cu situaţia funcţiilor de variabilă reală (unde o funcţie derivabilă o dată nu rezultă analitică).

Fie în adevăr f olomorfă (de clasă C^1) într-un deschis $A \subset \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A$ fixat. Făcînd o translaţie, putem presupune că $z_0 = 0$ deci f este olomorfă într-un disc $|z| < R$. Alegem r astfel încît $0 < r < R$ şi aplicăm formula integrală Cauchy pentru discul $|z| \le r$ şi u cu $|u| < r$. Deci

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-u}\,dz,$$

unde γ_r este cercul $|z| = r$ etc. Scriind

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{u}{z}}$$

şi cum pentru $|z| = r$ avem $|u/z| < 1$, rezultă

$$\frac{1}{z-u} = \sum_0^\infty \frac{u^n}{z^{n+1}} \text{ (serie UC).}$$

Se înmulţeşte cu $f(z)$ şi se integrează termen cu termen pe γ_r. Notînd

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

pentru $n \ge 0$ şi $0 < r < R$, rezultă $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, în $|z| < R$ deci f este analitică în vecinătatea oricărui punct din A.

TEOREMA XIII. 5. O funcţie $f : A \to \mathbb{C}$ de clasă C^1 pe un deschis A este olomorfă dacă şi numai dacă este analitică.

DEMONSTRAŢIE. Dacă f este olomorfă, am arătat mai sus că este analitică. Reciproc, dacă f este analitică în A, fie $\forall z_0 \in A$. Atunci într-o vecinătate a lui z_0 are loc o dezvoltare în serie de forma $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ deci $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a_1 + a_2(z-z_0) + \ldots$ şi limita $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a_1 + a_2(z-z_0) + \ldots$ există şi este egală cu a_1, deci f este $\mathbb{C}$ – derivabilă şi z_0.

2. Formula Gauss – Ostrogradski

Pentru a obţine în $\mathbb{R}^3$ o formulă analoagă formulei Green – Riemann, vom urma aceleaşi idei dezvoltate în paragraful precedent adaptate la noua situaţie. Pentru a nu mai intra în detalii algebrice, vom trata pe scurt 3 – formele diferenţiale în $\mathbb{R}^3$. Se ştie că

$$(*)\qquad dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0,$$

$$dx\wedge dy = -dy\wedge dx,\ dx\wedge dz = -dz\wedge dx,\ dy\wedge dz = -dz\wedge dy.$$

Vom considera şi produse $dx\wedge(dy\wedge dz)$ şi celelalte combinaţii, asociative prin definiţie şi respectînd regulile de calcul (*). Vom extinde apoi prin liniaritate aceste produse pentru combinaţii liniare. Expresia $dx\wedge(dy\wedge dz)$ va fi notată cu $dx\wedge dy\wedge dz$ etc. Se observă că printr-o permutare pară valoarea nu se schimbă iar printr-o permutare impară se schimbă semnul ($dx\wedge dy\wedge dz = -dy\wedge dx\wedge dz$ etc.).

O **3 – formă** pe $M \subset \mathbb{R}^3$ este prin definiţie o expresie $\beta = f dx\wedge dy\wedge dz$ cu $f : M \to \mathbb{R}$; clasa formei este dată de clasa funcţiei f. Dacă

$$\alpha = P dy\wedge dz + Q dz\wedge dx + R dx\wedge dy$$

este o 2 – formă de clasă C^1 pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^3$ cu $P,Q,R \in C^1(A)$ definim $d\alpha$ prin

$$d\alpha = dP\wedge dy\wedge dz + dQ\wedge dz\wedge dx + dR\wedge dx\wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz$$

deci $d\alpha$ este o 3 – formă continuă pe A cu

$$f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Dacă $\theta : A \to \mathbb{R}^3$, $\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ este o aplicaţie de clasă C^1, atunci

$$d\theta_1\wedge d\theta_2\wedge d\theta_3 = \frac{D(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}{D(u,v,w)}du\wedge dv\wedge dw = J_\theta du\wedge dv\wedge dw,\ \text{cu } (u,v,w) \in A.$$

Pentru orice 3 – formă $\beta = f dx\wedge dy\wedge dz$, se pune $\theta^*\beta = (f\circ\theta)\cdot J_\theta du\wedge dv\wedge dw$. Se verifică uşor că pentru o 2 – formă α şi o aplicaţie θ de clasă C^2, avem $d(\theta^*\alpha) = \theta^*(d\alpha)$. Dacă $\beta = f dx\wedge dy\wedge dz$ este o 3 – formă pe $M \subset \mathbb{R}^3$, definim

$$\int_M \beta = \iiint_M f\, dx\, dy\, dz,$$

în ipoteza că integrala a doua are sens. Din cele de mai sus, rezultă că dacă $\theta : A \to B$ este un difeomorfism da clasă C^1 între deschişii A,B din $\mathbb{R}^3$ cu $J_\theta > 0$ şi $\beta = f dx\wedge dy\wedge dz$ este o 3 – formă integrabilă pe B atunci $\theta^*\beta$ este

integrabilă pe A şi $\int_A \theta^*\beta = \int_B \beta$. În adevăr, conform definiţiilor, $\theta^*\beta = (f\circ\theta)\cdot J_\theta du\wedge dv\wedge dw$ şi totul revine la

$$\iiint_A (f\circ\theta)\cdot J_\theta\, du\wedge dv\wedge dw = \iiint_B f\, dx\, dy\, dz,$$

care este tocmai teorema de schimbare de variabilă.

Fie acum $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \text{ şi } 0 \le z \le \varphi(x,y),\ \varphi \ge 0\}$, unde $\varphi : D \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1, iar D este un disc compact în $\mathbb{R}^2$ (fig. XIII. 10).

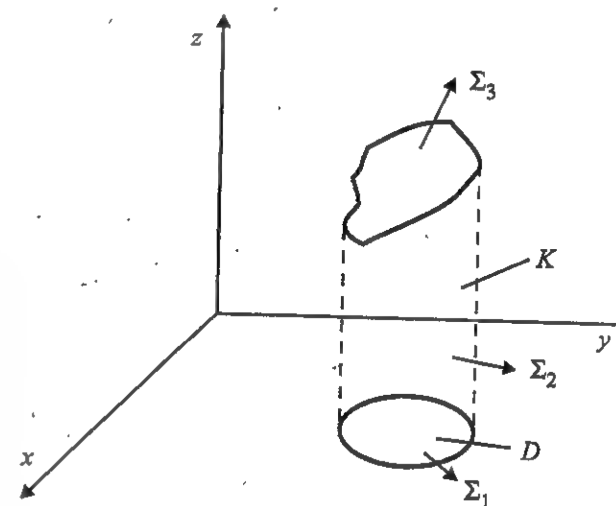


Fig. XIII. 10.

Frontiera lui K este formată din mulţimile Σ_1, Σ_2, Σ_3 (discul D, porţiunea laterală de cilindru şi "capacul" format din punctele $(x,y,\varphi(x,y))$, cu $(x,y) \in D$. Vom arăta că Σ_1, Σ_2, Σ_3 se pot considera ca "suprafeţe" orientate.

Pentru Σ_1 lucrurile sunt clare. Vom "orienta" Σ_1 după normala exterioară (sensul descrescător al lui z).

Pentru Σ_3 vom considera pînza parametrizată $(x,y) \mapsto (x,y,\varphi(x,y))$ şi elementul de suprafaţă orientat după normala **exterioară** $\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, 1\right)$ (normala face cu semiaxa pozitivă Oz un unghi ascuţit).

Cît despre Σ_2, este clar că, local, pentru orice punct pe Σ_2 (ce nu este în Σ_1 sau în Σ_3), Σ_2 este imaginea unei pînze parametrizate (cilindru) şi vom fixa orientarea normalei exterioare. Să luăm 2 – forma $\alpha = R dx \wedge dy$, cu R de clasă C^1 în vecinătatea lui K. Punem prin definiţie $\int_{\partial K} \alpha = \int_{\Sigma_1} \alpha + \int_{\Sigma_2} \alpha + \int_{\Sigma_3} \alpha$. În mod clar $\int_{\Sigma_2} \alpha = 0$ căci normala la Σ_2 este perpendiculară pe Oz.

$$\int_{\Sigma_1} \alpha = -\iint_D R(x,y,0)\, dx \wedge dy\,, \quad \int_{\Sigma_3} \alpha = \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\, dx \wedge dy\,.$$

Pe de altă parte

$$\int_K d\alpha = \iiint_K \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_0^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx\, dz = \iint_D [R(x,y,\varphi(x,y)) - R(x,y,0)]\, dx\, dy$$

În definitiv,

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha\,,$$

formulă asemănătoare formulei Green – Riemann şi numită **formula Gauss – Ostrogradski** (C. F. GAUSS, 1777 – 1855; M. V. OSTROGRADSKI, 1801 – 1861). Desigur avem aici un caz foarte particular de compact K cu "bord" orientat în $\mathbb{R}^3$ şi un caz particular de 2 – formă. Se mai spune că un compact ca mai sus este "simplu" în raport cu z. Este clar că se pot obţine rezultatele analoage pentru compacţi simpli în raport cu y respectiv x şi 2 – forme corespunzătoare. Folosind proprietatea de invarianţă a integralelor 3 – formelor prin difeomorfisme ce "păstrează orientarea" (adică cu jacobian > 0), se obţine că pentru un compact simplu în raport cu una din axe, cu frontiera orientată după normala exterioară, formula Gauss – Ostrogradski este valabilă pentru orice 2 – formă de clasă C^1,

$$\alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Pentru a generaliza formula Gauss – Ostrogradski, se definesc **compacţi cu bord orientat** în $\mathbb{R}^3$ ca mulţimi compacte $K \subset \mathbb{R}^3$ astfel încît pentru orice punct $(x_0,y_0,z_0) \in \partial K$ (frontiera lui K) există o vecinătate deschisă V a lui (x_0,y_0,z_0), astfel încît $V \cap K$ să fie difeomorfă (clasa C^2 cu păstrarea orientării) cu compacţi "simpli". Se orientează ∂K după normala exterioară. Folosind o tehnică de **partiţie a unităţii**, similară celei folosie la stabilirea formulei Green – Riemann, obţinem:

TEOREMA XIII. 6. (formula generală Gauss – Ostrogradski). Fie K un compact cu bord orientat în $\mathbb{R}^3$ (bordul ∂K orientat după normala exterioară) şi $\alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ o 2 – formă de clasă C^1 în vecinătatea lui K. Atunci

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha\,,$$

sau mai explicit:

$$\int_{\partial K} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz\,.$$

OBSERVAŢII. 1) Pentru definirea integralei $\int_{\partial K} \alpha$ se poate folosi partiţia unităţii; în aplicaţii se face o descompunere convenabilă a bordului ∂K în elemente de suprafaţă (ca în cazul compacţilor simpli).

2) Este clar că se poate generaliza formula la cazul cînd bordul lui K are puncte "singulare" deci elementele de suprafaţă ce definesc frontiera cu funcţii de clasă C^1 "pe porţiuni". Nu intrăm în detalii.

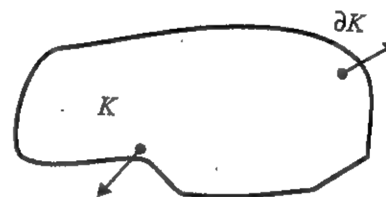


Fig. XIII. 11.

3. Formula lui Stokes

Fie $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată ($\Delta \subset \mathbb{R}^2$ fiind o mulţime deschisă şi conexă). Notăm $(u,v) \in \Delta$ şi $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ şi $\varphi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$. Reamintim că pînza este **simplă** dacă φ este injectivă. Pînza se zice **regulată** dacă φ are rang 2 în orice punct.

Un **element de suprafaţă bordată în** $\mathbb{R}^3$ este o submulţime $S \subset \mathbb{R}^3$ astfel încît există o pînză **simplă** şi **regulată** de clasă C^2, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ şi un **compact cu bord** $K \subset \Delta$ astfel încît $S = \varphi(K)$. Mulţimea $\varphi(\partial K)$ se numeşte bordul lui S şi se notează ∂S. Să observăm dacă $\psi : D \to \mathbb{R}^3$ este o pînză C^2 echivalentă cu φ, atunci există un unic compact cu un bord $L \subset D$ aşa încît $\psi(L) = S$ şi $\psi(\partial L) = \partial S$. În plus, dacă θ este o schimbare de parametru $\varphi = \psi \circ \theta$, atunci $\theta(K) = L$ şi $\theta(\partial K) = \partial L$. Deci noţiunea de element de suprafaţă bordată este obţinută dintr-o pînză (definită în lecţia a XII–a), luînd restricţia unei parametrizări admisibile la un compact cu bord. Accentul a fost pus aici pe imaginea pînzei. Aria elementului de suprafaţă bordată S se defineşte ca aria pînzei $\varphi|_K$, deci ca $\iint_K \|N_\varphi\|\, du\, dv$ şi este independentă de φ şi de K ($\varphi(K) = S$).

Fie acum $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1 – formă de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^3$. Definim

$$d\alpha = dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge z = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy .$$

Deci $d\alpha$ este o 2 – formă continuă pe A.

Fie $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\Delta) \subset A$ o pînză parametrizată de clasă C^2. Avem pentru orice 1 – formă α de clasă C^2 pe A

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha).$$

Demonstraţia acestui fapt este o simplă verificare cu ajutorul definiţiilor.

Fie acum S un element de suprafaţă bordată în $\mathbb{R}^3$, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată $K \subset \Delta$, $\varphi(K) = S$ ca în definiţia elementului de suprafaţă şi K un compact cu bord orientat. Orientăm S considerînd clasa de orientare (deci elementul de suprafaţă orientat) definită pe φ. Aceasta revina la a considera normala

$$N_\varphi = \left(\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}, \frac{D(Z,X)}{D(u,v)}, \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}\right)$$

şi versorul normală unitară $\dfrac{N_\varphi}{\|N_\varphi\|}$ ce caracterizează orientarea. Vom orienta ∂S considerînd în mod natural orientarea indusă $\varphi|_{\partial K}$ de pe bordul lui K (∂K este o reuniune de imagini de arce orientate etc.). Astfel orientat, S devine un **element orientat de suprafaţă bordată**. Se mai zice că orientarea pe S este compatibilă cu cea de pe ∂S ("regula mîinii stîngi": parcurgînd ∂S în sensul orientării cu capul spre sensul normalei la S, S rămîne la stînga).

Fie β o 2 – formă continuă în vecinătatea lui S şi $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată, $K \subset \Delta$, $\varphi(K) = S$. Definim $\int_S \beta = \iint_K \varphi^*(\beta)$. Să observăm că integrala nu depinde de pînza parametrizată admisibilă în clasa de orientare. Să luăm $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1 – formă de clasă C^1 în vecinătatea lui S. Avem $\int_{\partial S} \alpha = \int_{\partial K} \varphi^*\alpha$ din definiţie. Mai departe, $\int_S \alpha = \iint_K \varphi^*(d\alpha) = \iint_K d(\varphi^*\alpha)$. Dar pe compactul cu bord orientat se poate aplica formula Green – Riemann, deci

$$\int_{\partial K} \varphi^*\alpha = \iint_K d(\varphi^*\alpha).$$

În definitiv,

$$\boxed{\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha}.$$

Aceasta este **formula lui** J. G. STOKES, 1819 – 1903 (profesor al lui J. C. MAXWELL) pentru elemente de suprafaţă bordată.

Pentru a generaliza formula lui Stokes la suprafeţe generale, vom considera reuniuni $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$ de elemente orientate de suprafaţă bordată astfel încît S_i şi S_j să aibă eventual doar puncte din ∂S_i (∂S_j) în comun pentru $i \neq j$, intersecţia $\partial S_i \cap \partial S_j$ să fie sau vidă sau imaginea unui arc de clasă C^2, intersecţia a trei elemente diferite să aibă cel mult un punct comun şi în fine S să fie conexă (fig. XIII. 12).

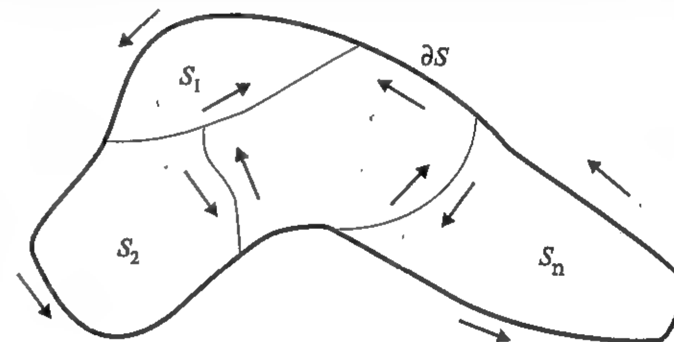


Fig. XIII. 12.

S va fi o **suprafaţă bordată orientată** dacă pe porţiunile γ_{ij} de arce comune, orientările induse de S_i respectiv S_j sunt opuse. Se defineşte în mod natural ∂S ca fiind mulţimea punctelor care aparţin exact unui singur bord ∂S_i sau sunt limite de astfel de puncte. S are o orientare, ∂S de asemenea şi acestea sunt compatibile. Obţinem

TEOREMA XIII. 7. (formula lui Stokes). Fie $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1 – formă de clasă C^1 în vecinătatea unei suprafeţe bordate orientate S. Atunci

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha .$$

(integralele se definesc ca

$$\int_{\partial S} \alpha = \sum_i \int_{\partial S_i} \alpha, \quad \int_S d\alpha = \sum_i \int_{S_i} d\alpha$$

şi se poate arăta că nu depind de descompunerea particulară a lui S în elemente).

4. Elemente de teoria cîmpului

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis nevid.

Definiţia XIII. 2. Prin **cîmp scalar** în U se înţelege o funcţie $\varphi : U \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, cu valori scalare. Un **cîmp vectorial** în U este o aplicaţie $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1; componentele (P,Q,R) ale lui v sunt cîmpuri scalare.

Pentru orice $c \in \mathbb{R}$, mulţimile $\{(x,y,z) \in U \mid \varphi(x,y,z) = c\}$ se numesc **suprafeţe de nivel** pentru cîmpul scalar φ. Pentru orice punct $a = (x_0,y_0,z_0) \in U$, **gradientul cîmpului scalar** φ în punctul a este vectorul

$$\nabla_a\varphi = \text{grad}_a\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a)\right).$$

Cîmpul vectorial $\nabla\varphi = \text{grad}\varphi$ asociază oricărui punct $a \in U$, vectorul $\nabla_a\varphi$ şi se numeşte **cîmpul de gradienţi** asociat lui φ.

Se cunosc proprietăţile de calcul ale gradientului. Adăugăm o proprietate geometrică importantă:

TEOREMA XIII. 8. Dacă $\varphi : U \to \mathbb{R}$ este un cîmp scalar, $a \in U$ şi S este suprafaţa de nivel trecînd prin a, atunci gradientul $\nabla_a\varphi$, presupus nenul, este normal la S.

DEMONSTRAŢIE. Trebuie arătat că $\nabla_a\varphi$ este ortogonal planului tangent T_aS. Ecuaţia suprafeţei S este $\varphi(x,y,z) = \varphi(a)$. Fie $\forall\, v \in T_aS$ deci există un drum parametrizat de clasă C^1, $\gamma : I \to S$ situat pe S şi există $t_0 \in I$ cu $\gamma(t_0) = a$ şi $\gamma'(t_0) = v$. Punînd $\forall\, t \in I$, $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$, rezultă $\varphi(x(t),y(t),z(t)) = \varphi(a)$. Derivînd în raport cu t, rezultă $<\nabla_{\gamma(t)}\varphi, \gamma'(t)> = 0$ şi făcînd $t = t_0$, $<\nabla_a\varphi, v> = 0$ deci $\nabla_a\varphi$ este ortogonal pe v.

EXEMPLUL 1. Dacă φ este cîmpul scalar al temperaturilor (deci $\forall\,(x,y,z) \in U$, $\varphi(x,y,z)$ este temperatura în acel punct), atunci suprafeţele de nivel ale lui φ se numesc **izoterme**. Un exemplu tipic de cîmp vectorial îl constituie cîmpul vitezelor particulelor (asimilate cu puncte) ale unui fluid situat într-un recipient.

EXEMPLUL 2. Fie O un punct material fixat; pentru orice M ≠ O se notează $\boldsymbol{r}$ = **OM** (vectorul de poziţie) şi $r = |\boldsymbol{r}|$. Forţa de atracţie newtoniană realizată de O în M este $\boldsymbol{F} = -\dfrac{a \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ ($a > 0$ constant, m_1,m_2 masele punctelor O şi M); notînd $k = am_1m_2$, rezultă $\boldsymbol{F} = -k\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. Introducînd coordonate rezultă $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi $\boldsymbol{F} = -k\left(\dfrac{x}{r^3}, \dfrac{y}{r^3}, \dfrac{z}{r^3}\right)$. Se obţine un cîmp vectorial

în $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, numit **cîmpul newtonian** realizat de O. Direct din definţie rezultă

$$\nabla r = \text{grad}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

şi mai general $\nabla f(r) = f'(r)\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. Aşadar, $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ şi cîmpul newtonian rezultă un cîmp de gradienţi în deschisul $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, anume

$$\boldsymbol{F} = -k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = k\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{k}{r}\right).$$

Definiţia XIII. 3. Fie $\boldsymbol{v} = (P,Q,R)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Pentru orice punct $a \in U$, se pot defini **divergenţa lui v în a**,

$$\text{div}_a\boldsymbol{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a)$$

şi **rotorul lui v în a**,

$$\text{rot}_a\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a), \frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a), \frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a)\right).$$

Sunt definite astfel un cîmp scalar,

$$\text{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

şi un cîmp vectorial, rot$\boldsymbol{v}$, cu componentele

$$w_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\quad w_2 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\quad w_3 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Cîmpul $\boldsymbol{v}$ se zice **solenoidal** în U dacă $\forall\, a \in U$, $\text{div}_a\boldsymbol{v} = 0$. Cîmpul $\boldsymbol{v}$ se zice **irotaţional** dacă $\forall\, a \in U$, $\text{rot}_a\boldsymbol{v} = 0$.

Direct din definiţie, rezultă următoarele reguli de calcul:

1. div$\boldsymbol{c}$ = 0, rot$\boldsymbol{c}$ = 0 pentru orice vector constant $\boldsymbol{c}$;
2. $\text{div}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \text{div}\boldsymbol{v} + \text{div}\boldsymbol{w}$, $\text{rot}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \text{rot}\boldsymbol{v} + \text{rot}\boldsymbol{w}$ şi $\text{div}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\cdot\text{rot}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot\text{rot}\boldsymbol{w}$, pentru orice cîmpuri vectoriale $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$;
3. $\text{div}(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha\text{div}\boldsymbol{v}$, $\text{rot}(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha\text{rot}\boldsymbol{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ constant;
4. $\text{div}(\varphi\boldsymbol{v}) = \varphi\text{div}\boldsymbol{v} + <\boldsymbol{v},\nabla\varphi>$, $\text{rot}(\varphi\boldsymbol{v}) = \varphi\text{rot}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \nabla\varphi$, pentru orice cîmp scalar φ şi orice cîmp vectorial $\boldsymbol{v}$.
5. $\text{div}\boldsymbol{r} = 3$, $\text{rot}\boldsymbol{r} = 0$, $\text{div}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 0$, $\text{rot}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{c}$, pentru orice vector constant $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}$ fiind vectorul de poziţie.
6. Dacă φ şi $\boldsymbol{v}$ sunt cîmpuri de clasă $C^2(U)$, atunci

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$$

(**laplacianul** lui φ, după numele lui P. LAPLACE, 1749 – 1827). După calcule imediate rezultă relațiile:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = 0 \text{ și } \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0,\ v \text{ și } \varphi \text{ de clasă } C^2.$$

7. Oricărui cîmp vectorial $\boldsymbol{v} = (P,Q,R)$ i se pot asocia o 1 – formă $\alpha = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ și o 2 – formă $\beta = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, de clasă C^1 pe U. Atunci

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

deci dα are drept coeficienți componentele lui rot**v**. În mod similar,

$$\mathrm{d}\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

deci este o 3 – formă cu coeficientul tocmai tocmai div**v**. Aplicînd lema lui Poincaré, rezultă că dacă dα = 0, atunci există φ astfel încît α = dφ; aceasta revine în limbaj vectorial: dacă rot**v** = 0, atunci local există φ astfel încît **v** = ∇φ. În mod similar, dacă dβ = 0, atunci există o 1 – formă γ astfel încît β = dγ deci dacă div**v** = 0, atunci local există un cîmp un cîmp vectorial **w** astfel încît **v** = rot**w**. Cu alte cuvinte, **orice cîmp irotațional este local un cîmp de gradienți și orice cîmp solenoidal este local un cîmp de rotori.**

EXEMPLUL 3. Fie **E** cîmpul electric, **B** cîmpul magnetic, variabile în timp și în spațiu, considerate într-un domeniu de studiu asimilat cu deschis $U \subset \mathbb{R}^4$. Se notează cu $\rho(x,y,z,t)$ densitatea de sarcină, **J** densitatea de curent și cu c viteza luminii. Din considerente fizice, J. C. MAXWELL (1831 – 1879) a dedus ecuațiile următoare care îi poartă numele:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\ \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho,\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Dealtfel operatorii "div" și "rot" au fost introduși de Maxwell tocmai în legătură cu stabilirea și studiul ecuațiilor cîmpului electromagnetic. Din ecuația secundă, aplicînd div rezultă

$$0 = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{E}),$$

deci ținînd cont de a treia ecuație, se obține

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

(numită **ecuația de continuitate**). Dacă **B** nu depinde de timp, atunci rot**E** = 0 deci **E** = ∇ψ și ecuația a treia devine Δψ = 4πρ (numită ecuație de tip Poisson). În fine, dacă **J** = 0 și ρ = 0 (se spune atunci că spațiul este liber), atunci notînd $\boldsymbol{A} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$, rezultă

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left(-\frac{1}{c}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{8\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B^2 + E^2)$$

deci punînd $\varphi = \frac{1}{8\pi}(B^2 + E^2)$, se obține

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \textbf{(ecuația lui Poynting)}.$$

În cele ce urmează, ne propunem să retranscriem formulele integrale date în paragrafele anterioare în notație vectorială, așa cum sunt utilizate de obicei. Fie $\boldsymbol{v} = (P,Q,R)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ și $\alpha = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 1 – forma asociată. Dacă $\gamma : [a,b] \to U$ este un drum de clasă C^1 pe porțiuni, atunci **circulația** lui **v** în lungul lui γ este integrala curbilinie

$$\Gamma = \int_\gamma \alpha = \int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

Dacă **v** este un cîmp de forțe, atunci α = <**v**,d**r**> = **v**·d**r** (produs scalar) se numește lucru elementar, iar Γ este numit **lucrul** lui **v** în lungul lui γ. Pentru calculul efectiv al lui Γ, se utilizează o reprezentare parametrică a lui γ și calculul se reduce la o integrală uzuală.
Teorema XIII. 6 se rescrie astfel:

$$\int_{\partial K} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iiint_K (\operatorname{div}\boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Presupunînd că ∂K este o suprafață cu versorul – normală exterioară $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2,n_3)$, rezultă $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = n_1\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = n_2\mathrm{d}\sigma$ și $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = n_3\mathrm{d}\sigma$, unde dσ este elementul de arie pe suprafața ∂K. [Luînd o parametrizare locală $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ pentru ∂K, avem $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = A\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$, unde $A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}$; apoi $\mathrm{d}\sigma = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$ și $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|}$ deci $n_1\mathrm{d}\sigma = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i})\mathrm{d}\sigma = A\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$]. Formula anterioară se rescrie atunci astfel:

$$\int_{\partial K}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma = \iiint_K (\operatorname{div}\boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Membrul întîi se mai numește **fluxul** cîmpului vectorial **v** prin suprafața ∂K, după normala exterioară **n**. Formula Gauss – Ostrogradski se mai numește "flux – divergență". În particular, **fluxul unui cîmp solenoidal printr-o suprafață închisă** (de tip ∂K) **este nul**.

EXEMPLUL 4. Calculăm fluxul lui $v = (x,y,z)$ prin emisfera $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$, după normala care face un unghi ascuţit cu semiaza pozitivă Oz. În acest caz,

$$n = \text{versorul lui grad}(x^2 + y^2 + z^2) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \text{ unde } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

Atunci fluxul creat este

$$\int_S (v \cdot n)\,d\sigma = \int_S \frac{x^2+y^2+z^2}{r}\,d\sigma = \int_S r\,d\sigma = \int_S R\,d\sigma = R \text{ aria} S = 2\pi R^3 .$$

Formula lui Stokes (teorema XIII. 7) se poate scrie explicit sub forma

$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_S (\text{rot}v \cdot n)\,d\sigma$$

şi se mai numeşte formula "circulaţie – rotor". Aşadar, **circulaţia Γ a lui v în lungul bordului ∂S** (curbă închisă) **este egală cu fluxul rotorului lui v prin suprafaţa S.** În particular, **circulaţia unui cîmp irotaţional în lungul oricărei curbe închise (de tip bord) este nulă.**

EXEMPLUL 5. Considerăm octantul de sferă

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

şi calculăm circulaţia cîmpului newtonian $v = \frac{r}{r^3}$ în lungul bordului ∂S al lui S. Aplicăm formula lui Stokes şi rezultă

$$\Gamma = \int_{\partial S} v \cdot dr = \int_S (\text{rot}v) \cdot n\,d\sigma = 0, \text{ deoarece rot}v = 0.$$

5. 10 exerciţii

1. Să se calculeze, folosind formula Green – Riemann, integrala curbilinie

$$I = \int_\gamma y\,dx + 2x\,dy,$$

în lungul frontierei γ orientate pozitiv a semicercului $K = \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

2. Fie P,Q funcţii de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^2$, astfel încît $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ în U. Să se arate că circulaţia lui $v = (P,Q)$ în lungul bordului oricărui compact $K \subset U$, cu bord orientat, este nulă. Reciproca este falsă.

3. Fie $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă de clasă C^1 într-un deschis $A \subset \mathbb{C}$, $P = \text{Re}f$, $Q = \text{Im}f$. Să se arate că P şi Q sunt armonice în A (o funcţie $u : A \to \mathbb{R}$ se zice **armonică** dacă este de clasă $C^2(A)$ şi $\Delta u = 0$).

4. Fie c un vector constant şi r vectorul de poziţie.

a) Să se calculeze div$v$, rot$v$ pentru $v = (c \cdot r)r$ şi pentru $v = r^2(c \times r)$.

b) Să se arate că $\text{rot}\frac{r \times c}{r^2} = \text{grad}\left(\frac{r \cdot c}{r^3}\right)$.

5. Să se determine un cîmp vectorial v de clasă C^1 în $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ astfel încît rot$v = (x,y,-2z)$ şi v este ortogonal pe Oz.

6. a) Să se calculeze, folosind formula Gauss – Ostrogradski, fluxul cîmpului $v = (2xz,2z,xy)$ prin suprafaţa închisă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, după normala exterioară.
b) Aceeaşi problemă pentru $v = (2xz,2yz,-2z^2)$ prin suprafaţa deschisă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$.

7. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, circulaţia lui $v = (y,z,x)$, în lungul cercului $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ parcurs pozitiv o dată în raport cu Oz.

8. Determinaţi un potenţial scalar φ pentru cîmpul irotaţional $v = (2xy,x^2+z,y)$, adică $v = \nabla\varphi$, şi un potenţial vector w pentru cîmpul solenoidal $v = (2xy,-y^2,1)$, adică $v = \text{rot}w$.

9. Un lichid de densitate constantă c se află într-un recipient K, asimilat cu un compact conţinul în semispaţiul $z < 0$ (spaţiul $\mathbb{R}^3$ se presupune raportat la un triedru ortogonal Oxyz de versori i, j, k). Presupunînd că presiunea creşte proporţional cu adîncimea şi cîmpul presiunilor este $v = czk$, să se calculeze fluxul lui v prin ∂K (numit **forţă ascensională** a lichidului) şi să se deducă legea lui Arhimede.

10. Fie $v = (P,Q,R)$ un cîmp de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. O curbă $\gamma : I \to U$ de clasă C^1, $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$, se zice **linie de cîmp** pentru v dacă $\forall\, t \in I$, vectorul – tangentă $\gamma'(t)$ este coliniar cu v, deci $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$. Să se determine liniile de cîmp pentru $v = (2x,yz,z)$, $v = (xy,y^2,z)$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. $P = y$, $Q = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Atunci $I = \text{aria}K = \frac{\pi}{2}$.

2. Circulaţia este $\int_{\partial K} P\,dx + Q\,dy$ şi este nulă, folosind ipoteza asupra funcţiilor P,Q şi formula Green – Riemann. Pentru reciprocă, să considerăm $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ în $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se observă că $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ în U şi totuşi circulaţia lui $v = (P,Q)$ în lungul cercului unitate $x^2 + y^2 = 1$ este nenulă. Acest cerc nu este frontieră de compact bordat în U.

3. Scriem ecuaţiile Cauchy – Riemann: $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. Atunci

$$\Delta P - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0,$$

conform teoremei lui Schwartz. La fel, $\Delta Q = 0$.

4. a) Fie $\varphi = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}$. Scriind pe coordonate, avem $\boldsymbol{c} = (c_1,c_2,c_3)$ şi $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ deci $\varphi = c_1x + c_2y + c_3z$. Atunci

$$\nabla\varphi = (c_1,c_2,c_3) = \boldsymbol{c},\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{r}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi = 3\varphi + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c} = 4\varphi, \text{ iar}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\times\nabla\varphi = -\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}.$$

Pentru $\boldsymbol{v} = r^2(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$ avem $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = r^2\operatorname{div}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}) = 0$ etc.

b) $\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}}{r^2} = \operatorname{rot}\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}) = \frac{1}{r^2}\cdot 2\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c})\times\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right)$ şi $\operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot r^3 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\cdot 3r^2\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}}{r^6}$ etc.

5. Luăm deci $v = (P,Q,R)$ şi din relaţia dată rezultă

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = x,\ \frac{\partial P}{\partial z} = y \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2z.$$

Atunci $Q = -xz + C_1(x,y)$, $P = yz + C_2(x,y)$ şi putem lua $C_1 = C_2 \equiv 0$.

6. a) $\Phi = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} 2z\,dx\,dy\,dz$. Trecînd la coordonate sferice, rezultă

$$\Phi = 2\iiint r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr \text{ etc.}$$

b) În acest caz $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$. Fie S_1 emisfera şi S_2 porţiunea din planul xOy cu $x^2 + y^2 \le 1$. Atunci

$$\Phi = \int_{S_1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d\sigma = \int_{S_1} + \int_{S_2} - \int_{S_2} = \int_{S_1\cup S_2} - \int_{S_2} = -\int_{S_2} = -\iint_{S_2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})dx\,dy = -\int_{S_2}2z^2dx\,dy = 0.$$

7. Avem $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = (-1,-1,-1)$ şi putem lua S = porţiune din planul $z = 1$ cu $x^2 + y^2 \le 1$. Atunci cum $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, circulaţia este

$$\Gamma = \int_{\partial S}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_S -d\sigma = -\operatorname{aria}S = -\pi.$$

8. Relaţia $v = \nabla\varphi$ devine $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 + z$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = y$. Apoi luăm $\boldsymbol{w} = (P,Q,0)$.

9. Forţa ascensională va fi

$$\Phi = \int_{\partial K}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iiint_K(\operatorname{div}\boldsymbol{v})dx\,dy\,dz = \iiint_K c\,dx\,dy\,dz = c\cdot\operatorname{vol}K = \text{masa fluidului}.$$

10. În primul caz, $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{z}$. Din ultimele două rapoarte rezultă $\frac{dy}{y} = dz$ deci $z = \ln|y| + C_1$; apoi $\frac{dx}{x} = 2\frac{dz}{z}$ deci $x = C_2z^2$. Liniile de cîmp apar ca intersecţia a două suprafeţe etc.

LECŢIA A XIV-A

SPAŢII HILBERT, SERII FOURIER

INTRODUCERE

Vom prezenta în această lecţie primele noţiuni de spaţii Hilbert, generalizarea cea mai naturală a spaţiilor $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$). În cadrul spaţiilor Hilbert se dezvoltă teoria seriilor Fourier generalizate, teoria operatorilor, precum şi teoriile moderne de optimizare (legate de utilizarea tehnicilor geometrice bazate pe produse scalare). Vom da apoi cîteva rezultate privind seriile Fourier trigonometrice, utilizate în Fizica modernă şi în telecomunicaţii, prin descompunerea semnalelor periodice în armonicele lor.

1. Spaţii Hilbert

Spaţiile vectoriale vor fi peste corpul $\mathbb{C}$.

Fie H un spaţiu vectorial (complex). Un **produs scalar pe** H este o funcţie $<,>: H \times H \to \mathbb{C}$, astfel încît:

1) $<x + y,z> = <x,y> + <x,z>$, $\forall x,y,z \in H$,
2) $<\alpha x,y> = \alpha<x,y>$, $\forall x,y \in H$ şi $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,
3) $<x,y> = \overline{<y,x>}$, $\forall x,y \in H$,
4) $\forall x \in H$, $<x,x> \ge 0$ şi în plus, $<x,x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(Reamintim că pentru $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda}$ este conjugatul lui λ).

Se deduc imediat şi proprietăţile:

5) $<x,y + z> = <x,y> + <x,z>$, $\forall x,y,z \in H$
6) $<x,\alpha y> = \overline{\alpha}<x,y>$, $\forall x,y \in H$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Noţiunea de produs scalar abstract a fost introdusă de marele matematician german DAVID HILBERT (1862 – 1943).

Definiţia XIV. 1. Un spaţiu **prehilbertian** este un spaţiu vectorial H, împreună cu un **produs scalar** pe H. Un spaţiu **unitar** este un spaţiu prehilbertian finit dimensional.

OBSERVAŢIE. Cu o modificare evidentă în condiţia 3, se obţine noţiunea de

produs scalar pe un spaţiu vectorial **real** şi noţiunea corespunzătoare de spaţiu prehilbertian. Spaţiile prehilbertiene reale finit dimensionale se numesc spaţii **euclidiene**.

Fie H un spaţiu prehilbertian. Definim $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$, pentru orice $x \in H$.

Inegalitatea lui Schwarz (G.K.A. SCHWARZ, 1843 – 1921):

$$|<x,y>| \le \|x\|\,\|y\|, \ \forall\, x,y \in H.$$

DEMONSTRAŢIE. Avem $<x + \alpha y, x + \alpha y> \ge 0$, $\forall\, x,y \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$, deci $<x,x> + \overline{\alpha}<x,y> + \alpha\overline{<x,y>} + |\alpha|^2<y,y> \ge 0$. Dacă $y \ne 0$ să luăm $\alpha = -\dfrac{<x,y>}{<y,y>}$ şi vom obţine inegalitatea dorită. Dacă $y = 0$, inegalitatea este banal verificată.

Se arată cu uşurinţă că:

a) $\|x\| \ge 0$ pentru orice $x \in H$ şi $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$, $\forall\, x \in H$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$,

c) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x,y \in H$.

Pentru c) se utilizează inegalitatea lui Schwarz. Aşadar, orice spaţiu prehilbertian H este un **spaţiu vectorial normat**, în mod canonic (cu norma $\|\cdot\|$ mai sus definită), deci şi un spaţiu metric, cu distanţa

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{<x - y, x - y>}, \ \forall\, x,y \in H.$$

Definiţia XIV. 2. Un spaţiu **Hilbert** este un spaţiu prehilbertian complet. În particular, orice spaţiu unitar este un spaţiu Hilbert.

EXEMPLUL 1. Spaţiul $H = \mathbb{C}^n$ este Hilbert relativ la produsul scalar,

$$<x,y> = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}, \ \forall\, x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n).$$

EXEMPLUL 2. Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură. Pe spaţiul vectorial $L^2_X(\mu)$ (lecţia a X – a) se defineşte produsul scalar $<f,g> = \int_X f\overline{g}\,d\mu$. Se obţine un spaţiu Hilbert (norma indusă este $\|\ \|_2$).

Un caz particular important este $X = \mathbb{N}$ şi μ măsura de numărare. În acest caz notăm $L^2_{\mathbb{N}}(\mu) = l^2$. Avem

$$l^2 = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{C},\ \sum |x_n|^2 < \infty\},$$

cu produsul scalar $<x,y> = \sum_n x_n\overline{y_n}$, $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$.

Fie H un spaţiu Hilbert. Dacă $x,y \in H$, spunem că x este **ortogonal** pe y dacă $<x,y> = 0$. În acest caz scriem $x \perp y$.

TEOREMA XIV. 1.

1) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, $\forall\, x,y \in H$,

2) Dacă $x \perp y$, atunci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

3) $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow <x_n,y_n> \to <x,y>$.

Demonstraţia este o consecinţă imediată a definiţiilor, $\|x + y\|^2 = <x + y, x + y>$ etc. Identitatea 1) este **regula "paralelogramului"** iar identitatea 2) "generalizează" teorema lui Pitagora.

OBSERVAŢIE. Se poate demonstra că regula paralelogramului caracterizează spaţiile normate pentru care norma provine dintr-un produs scalar (în modul descris mai sus).

Dacă $x \in H$ şi $A \subset H$, spunem că x este **ortogonal pe** A dacă $x \perp y$, pentru orice $y \in A$. Scriem în acest caz: $x \perp A$.

Dacă $A,B \subset H$ scriem $A \perp B$ dacă $x \perp y$ pentru orice $x \in A$, $y \in B$.

Pentru $A \subset H$, A nevidă, definim $A^{\perp} = \{x;\ x \perp A\}$. Se arată cu uşurinţă că dacă $A \subset H$, $A^{\perp}$ este un **subspaţiu vectorial** şi un **închis** al lui H (subspaţiu vectorial închis).

TEOREMA XIV. 2. (teorema proiecţiei). Fie $H_1 \subset H$ un subspaţiu vectorial închis şi $a \in H$. Există un unic $p \in H_1$ astfel încît

1) $\|a - p\| \le \|a - x\|$, $\forall\, x \in H_1$;

2) $(a - p) \perp H_1$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\alpha = \inf\{\|a - x\|,\ x \in H_1\}$. Pentru orice $n \ge 1$, natural există $x_n \in H_1$ încît

$$\alpha \le \|a - x_n\| < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Folosind regula paralelogramului pentru $x_m - a$, $x_n - a$, deducem

$$\|x_n + x_m - 2a\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2).$$

Deci

$$0 \le \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2) - \|x_n + x_m - 2a\|^2 \le$$

$$\le 2\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\alpha + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - a\right\|^2 \le \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} + 4\alpha\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

deoarece



$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} - a \right\|^2 \geq \alpha^2 .$$

Șirul $(x_n)_n$ este deci un șir Cauchy în H_1. H_1 fiind închis în spațiul Hilbert H, rezultă complet deci există $p \in H_1$ astfel ca $x_n \to p$. Deducem $\|a - p\| = \alpha$ și deci 1).

Dacă $p' \in H_1$, $\|a - p'\| \leq \|a - x\|$, $\forall\, x \in H_1$, urmează că $\|a-p'\| = \|a-p\| = \alpha$.

Din regula paralelogramului (pentru $\frac{a-p}{2}, \frac{a-p'}{2}$), avem

$$\left\|a - \frac{p+p'}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{p-p'}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{a-p}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{a-p'}{2}\right\|^2 = \alpha^2.$$

Dar $\alpha^2 \leq \left\|a - \frac{p+p'}{2}\right\|^2$ căci $\frac{p+p'}{2} \in H_1$. Deci $\|p - p'\| = 0$ și $p = p'$ (deci unicitate). Să arătăm că $(a - p) \perp H_1$. Fie $x \in H_1$, $x \neq 0$. Pentru $\lambda \in \mathbb{C}$ avem

$$\|a - p - \lambda x\|^2 = \langle a - p - \lambda x, a - p - \lambda x\rangle =$$

$$= \|a - p\|^2 - \bar{\lambda}\langle a - p, x\rangle - \lambda\overline{\langle a - p, x\rangle} + |\lambda|^2\|x\|^2 \geq \alpha^2$$

(căci $p + \lambda x \in H_1$). În fond

$$\bar{\lambda}\langle a - p, x\rangle + \lambda\overline{\langle a - p, x\rangle} - |\lambda|^2\|x\|^2 \leq 0 .$$

Luăm $\lambda = \frac{\langle a-p,x\rangle}{\|x\|^2}$ și obținem $\langle a - p, x\rangle = 0$. Cum pentru $x = 0$, $(a - p) \perp x$, rezultă $(a - p) \perp x$, $\forall\, x \in H_1$.

COROLAR. În condițiile teoremei de mai sus, $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$ (sumă directă, adică orice element $x \in H$ se scrie unic $x = z + y$ cu $z \in H_1$, $y \in H_1^{\perp}$).

OBSERVAȚIE. În teorema XIV. 2, p este numit **elementul de cea mai bună aproximare** a elementului $a \in H$ cu elemente din H_1. De asemenea tabloul "geometric" al teoremei XIV. 2 este clar: elementul p se obține "proiectînd" a pe H_1.

TEOREMA XIV. 3. (F. RIESZ, 1880 – 1956). Fie H un spațiu Hilbert și $T : H \to \mathbb{C}$ o **funcțională liniară și continuă**. Există și este unic $y_T \in H$ astfel încît $T(x) = \langle x, y_T\rangle$, $\forall\, x \in H$ și în plus $\|T\| = \|y_T\|$.

DEMONSTRAȚIE. Unicitatea lui y_T rezultă imediat căci dacă $\langle x,y_T\rangle = \langle x,y'_T\rangle$ $\forall\, x \in H$, rezultă $\langle x, y_T - y'_T\rangle = 0$ pentru orice $x \in H$ și deci $y_T = y'_T$.
Pentru a arăta existența, să notăm $H_1 = \operatorname{Ker} T = \{x \in H ; T(x) = 0\}$. H_1 este un spațiu **închis** în H. Să presupunem $H_1 \neq H$ căci cazul $H_1 = H$ este banal ($T \equiv 0$, $y_T = 0$).

Există $a \in H - H_1$, $a \perp H_1$ (corolarul teoremei proiecției).

Definim $y_T = \frac{\overline{T(a)}}{\|a\|^2} \cdot a$. Dacă $x \in H$, $x_1 = x - \frac{T(x)}{T(a)} a$ este un element în H_1 deci $\langle x_1, y_T\rangle = 0$. Rezultă

$$\langle x, y_T\rangle = \frac{T(x)}{T(a)}\left\langle a, \frac{\overline{T(a)}}{\|a\|^2} a\right\rangle = T(x).$$

În plus,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |T(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, y_T\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\|\,\|y_T\| = \|y_T\|$$

și

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |T(x)| \geq \left|T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right)\right| = \|y_T\| ,$$

așa că $\|T\| = \|y_T\|$ și teorema este demonstrată.

O familie $(e_j)_{j \in J}$ de elemente ale unui spațiu Hilbert H se zice un **sistem ortogonal** dacă $e_k \perp e_p$, $\forall\, k \neq p$.
Un sistem ortogonal $(e_j)_{j \in J}$ se zice **ortonormal** dacă în plus $\|e_j\| = 1$, $\forall\, j \in J$.
Să observăm că dacă $(e_j)_{j \in J}$ este un sistem ortogonal și nu conține pe $0 \in H$, atunci $(e_j)_{j \in J}$ este o familie liniar independentă și $(e_j / \|e_j\|)_{j \in J}$ formează un sistem ortonormal.

Definiția XIV. 3. Fie $(e_j)_{j \in J}$ un sistem ortonormal în H. Pentru fiecare $x \in H$, numerele $a_j(x) = \langle x, e_j\rangle$, $j \in J$ se numesc **coeficienții Fourier** (J. FOURIER 1768 – 1830) ai elementului x, în raport cu sistemul $(e_j)_{j \in J}$.

Numele lui J. Fourier, mare matematician francez, guvernator al Egiptului pe timpul lui Napoleon, este cel mai întîlnit în întreaga literatură științifică.

Fie $\{e_1,\ldots,e_n\}$ un sistem ortonormal. Avem

$$\left\|x - \sum_1^n a_j(x) e_j\right\| \leq \left\|x - \sum_1^n \alpha_j e_j\right\|, \text{ pentru orice } \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}.$$

În adevăr,

$$\left\|x - \sum_1^n \alpha_j e_j\right\|^2 = \left\langle x - \sum_1^n \alpha_j e_j,\, x - \sum_1^n \alpha_j e_j\right\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_1^n \bar{\alpha}_j a_j(x) - \sum_1^n \alpha_j \bar{a}_j(x) + \sum_1^n |\alpha_j|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_1^n |a_j(x)|^2 + \sum_1^n |a_j(x) - \alpha_j|^2 .$$

Deducem cu uşurinţă

Inegalitatea lui Bessel (F. V. BESSEL, 1784 – 1846). Dacă $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un sistem ortonormal, atunci pentru orice $x \in H$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x)|^2 \le \|x\|^2 .$$

Definiţia XIV. 4. O **bază ortonormală** a spaţiului Hilbert H este un sistem ortonormal $B = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încît subspaţiul vectorial generat de B să fie **dens** în H.
Reamintim că o submulţime $A \subset H$ este densă dacă orice element din H este limita unui şir de elemente din A.

TEOREMA XIV. 4. Fie $B = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o bază ortonormală în H. Atunci pentru orice $x \in H$, seria $\sum_n a_n(x)e_n$ converge către x (în H).

DEMONSTRAŢIE. $a_n(x) = \langle x,e_n\rangle$. Fie $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)e_k$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din ipoteza de densitate rezultă că există n_ε şi $y \in H_{n_\varepsilon}$ (spaţiul generat de $e_0,\dots,e_{n_\varepsilon}$) aşa încît $\|x - y\| < \varepsilon$. Evident pentru $n \ge n_\varepsilon$, $y \in H_n$ (spaţiul generat de $e_0,\dots,e_n$) şi $\|x - S_n\| \le \|x - y\| < \varepsilon$; deci $S_n \to x$ în H.

COROLAR. În ipotezele de mai sus,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x)|^2$$

(egalitatea lui M. A. PARSEVAL, 1755 – 1836). Această egalitate este o extindere a teoremei lui Pitagora.

Definiţia XIV. 5. În condiţiile teoremei XIV. 4, formula

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)e_n$$

se numeşte **dezvoltarea Fourier** a lui x în baza ortonormală $(e_n)_n$, sau **seria Fourier** a lui x.
Se observă că dacă $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o bază ortonormală în H, atunci aplicaţia $x \mapsto (a_n(x))_n$ este o **izometrie** a lui H pe l^2 (izometrie aici înseamnă bijecţie care conservă produsul scalar).
Vom încheia acest paragraf cu un exemplu fundamental.

Fie $L^2 = L^2_{(-\pi,\pi)}(d\mu)$ unde $d\mu = \frac{1}{2\pi}dx$ şi dx măsura Lebesgue. Considerăm $l_n = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Familia (l_n) este în mod evident numărabilă şi o considerăm dispusă în şirul

$$1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \dots .$$

Este un exerciţiu simplu de a arăta că $(e^{inx})_n$ este un sistem ortonormal în L^2. Se va arăta în paragraful următor că acest sistem este chiar o **bază ortonormală**. Pentru $f \in L^2$, **coeficienţii Fourier** (în raport cu această bază) vor fi

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

(produsul scalar în L^2 este $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\,d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\,dx$).

Seria Fourier pentru f va fi

$$\sum_{n\in Z} c_n(f)e^{inx} ,$$

iar sumele parţiale sunt **polinoamele trigonometrice**

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} .$$

Din cele arătate mai sus, $s_n \to f$ în L^2 şi

$$\sum_{n\in Z} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \text{ (conform egalităţii lui Parseval).}$$

Mai mult, dacă $(c_n)_{n\in Z}$ este în l^2 (adică $\sum_Z |c_n|^2 < +\infty$), şirul de polinoame trigonometrice $P_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}$ converge în L^2 către o funcţie care are $(c_n)_n$ drept coeficienţi Fourier.

Considerăm acum pe $(-\pi,\pi)$ măsura $d\mu = \frac{1}{\pi}dx$ şi spaţiul L^2 corespunzător acestei măsuri, cu produsul scalar $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx$. Fie sistemul ortonormal (chiar bază ortonormală):

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots,\ n \in \mathbb{N},\ n \ge 1.$$

Avem pentru $f \in L^2$ coeficienţii Fourier (clasici)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,\ n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n \geq 1$$

şi seria Fourier corespunzătoare

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

dezvoltarea fiind valabilă în L^2.

Folosind formulele lui Euler,

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

se stabileşte imediat legătura între coeficienţii Fourier $c_n(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$; anume,

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ n = 1,2,\ldots$$

2. Convergenţa seriilor Fourier

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcţie periodică de perioadă 2π pe $\mathbb{R}$ şi astfel încît $f \in L^1_{[-\pi,\pi]}$ în raport cu măsura Lebesgue, se pot defini **coeficienţii Fourier**

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,\ n = 0,\ 1,\ \ldots$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

şi seriile Fourier corespunzătoare

$$f \sim \sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx},\ f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

unde ~ se citeşte "seria asociată funcţiei f".

Problema care se pune este studiul convergenţei seriilor Fourier. Am văzut în paragraful precedent cum se prezintă situaţia în L^2, anume convergenţa în norma $\|\cdot\|_2$, numită "în medie pătratică". Sunt însă de mare interes şi alte tipuri de convergenţă (punctuală, uniformă etc.) În vederea acestui studiu a fost considerată şi ipoteza periodicităţii funcţiei f, avînd în vedere periodicitatea funcţiilor e^{inx}, $\cos nx$, $\sin nx$. Vom nota

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$ (**nucleul** DIRICHLET, 1805 – 1859) şi

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} D_m(x)$$ (**nucleul** FEJER, 1880 – 1956).

TEOREMA XIV. 5. Avem

1) $D_n(x) = \dfrac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}},\ n = 0,1,\ldots$

2) $K_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1 - \cos(n+1)x}{1 - \cos x},\ n = 0,1,\ldots$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi,\ n = 0,1,\ldots$

4) $K_n(x) \geq 0$ şi $K_n(x) \leq \dfrac{2}{(n+1)(1+\cos\delta)}$, pentru $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$.

DEMONSTRAŢIE. $(e^{ix} - 1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$. Se multiplică identitatea cu $e^{-ix/2}$ şi se obţine 1).

Din $(n+1)K_n(x) = \sum_0^m D_m(x)$ se obţine imediat formula

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) = 2 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x},$$

de unde 2).

3) rezultă dintr-un calcul imediat, iar 4) se obţine uşor din 2).

Fie acum

$$s_n(x) = s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e^{ikx}.$$

Avem

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

şi

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt.$$

TEOREMA XIV. 6. (Fejer). **Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **continuă şi de perioadă** 2π. Atunci $\sigma_n \overset{UC}{\to} f$ pe $\mathbb{R}$.

DEMONSTRAŢIE. $\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t) - f(x)]K_n(t)dt$. Fie $M > 0$ astfel încît $|f(x)| \le M$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $|x - y| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (f fiind uniform continuă !). Alegem N astfel încît pentru $n \ge N$, $\delta \le |t| \le \pi$ să avem $K_n(t) \le \frac{\varepsilon}{4M}$. Vom obţine

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\,K_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \pi\varepsilon, \text{ iar}$$

$$\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)|\,K_n(t) + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\,K_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{4M}\int_{-\pi}^{\pi} 2M = \pi\varepsilon,\ n \ge N.$$

În definitiv,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

dacă $n \ge N$ şi $\forall x \in \mathbb{R}$ şi teorema este demonstrată.

COROLAR. Dacă f,g sunt funcţii continue, de perioadă 2π pe $\mathbb{R}$ şi au aceiaşi coeficienţi Fourier, atunci $f = g$.

Să observăm că teorema XIV. 6 poate fi interpretată şi în felul următor: Dacă f este continuă în $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom trigonometric $T(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$ astfel încît $|f(x) - T(x)| \le \varepsilon$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$. În definitiv f se poate **aproxima uniform** cu **polinoame trigonometrice**.

Însă dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) este o funcţie continuă, atunci $g(x) = f(a + \frac{x}{\pi}(b-a))$ este continuă pe $[0,\pi]$. Extinzînd pe g la $[-\pi,\pi]$ prin paritate, rezultă că g se poate aproxima uniform cu polinoame trigonometrice pe $[-\pi,\pi]$. Dar polinoamele trigonometrice se pot aproxima uniform cu polinoame obişnuite pe $[-\pi,\pi]$ căci funcţiile sin, cos sunt sume de serii de puteri convergente pe toată dreapta reală. În definitiv g se poate aproxima uniform cu polinoame pe $[0,\pi]$, deci f se poate aproxima uniform cu polinoame pe $[a,b]$. S-a obţinut astfel

TEOREMA XIV. 7. (WEIERSTRASS). **Orice funcţie continuă pe un interval compact se poate aproxima uniform cu polinoame.**

Ca un corolar al acestei teoreme, deducem că şirul de funcţii $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală în L^2 (cu notaţia din paragraful precedent). În adevăr, funcţiile continue sunt dense în L^2 (teorema IX.11.) şi polinoamele trigonometrice sunt dense în mulţimea funcţiilor continue (în convergenţa uniformă care implică desigur convergenţa în L^2).

Să ne întoarcem la problema convergenţei seriei Fourier pentru $f \in L^1_{[-\pi,\pi]}$.

Avem

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

Folosind paritatea funcţiei D_n, putem scrie

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt, \text{ deci}$$

(*) $$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

LEMA (lui Riemann). Dacă $g \in L^1_{[a,b]}$, atunci

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b g(x)\sin kx\,dx = 0 \text{ şi } \lim_{k\to\infty}\int_a^b g(x)\cos kx\,dx = 0.$$

DEMONSTRAŢIE. Dacă g este de clasă C^1 pe $[a,b]$, lema rezultă integrînd prin părţi. În cazul general, se utilizează densitatea funcţiilor de clasă C^1 în spaţiul $L^1_{[a,b]}$.

TEOREMA XIV. 8. (U. DINI, 1845 – 1918). Fie f o funcţie de perioadă 2π, $f \in L^1_{[-\pi,\pi]}$ astfel încît pentru x **fixat** să existe $\delta > 0$, cu proprietatea ca integrala

$$(**) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$$

să existe. Atunci $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$.

DEMONSTRAŢIE. Din relaţia (*) rezultă:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Din condiţia (**) şi lema precedentă, deducem

$$s_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x).$$

Teorema este demonstrată. Dacă de exemplu f este continuă în x şi are derivate laterale finite în x, atunci condiţia (**) este îndeplinită.

OBSERVAŢIE. Dacă în teorema precedentă punem condiţia să existe $f(x-0)$, $f(x+0)$ (limitele laterale) şi integralele

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} dt, \quad \int_{0}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} dt,$$

atunci va rezulta că

$$s_n(x) \to \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Deci am demonstrat.

TEOREMA XIV. 9. (DIRICHLET). Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită măsurabilă de perioadă 2π, avînd pe $[-\pi,\pi]$ un număr finit de discontinuităţi de prima speţă şi derivate laterale finite în fiecare punct, atunci seria Fourier a funcţiei f converge punctual către $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

Presupunînd că $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică de perioadă $T = 2l$ $(l > 0)$, în loc de 2π, atunci toate rezultatele anterioare rămîn valabile; în acest caz coeficienţii Fourier sunt

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx, \ n \ge 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx, \ n \ge 1 \text{ şi}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx.$$

Teorema XIV. 9 se scrie astfel:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}.$$

Comentariu. 1) Dacă $f(t), t \in \mathbb{R}$ este un semnal continuu, periodic (de perioadă 2π), verificînd condiţiile teoremei XIV. 9 a lui Dirichlet, atunci coeficientul $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ reprezintă "media" lui f pe intervalul $[-\pi,\pi]$, iar termenul $a_n \cos nt + b_n \sin nt$, $n \ge 1$ cu perioada principală $\frac{2\pi}{n}$, se numeşte armonica de ordin n a semnalului f. Formula

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

se interpretează ca descompunerea semnalului f în armonicele sale. În modificarea semnalelor unele armonice trebuie atenuate şi altele amplificate. O problemă complexă, de mare însemnătate practică, este cea a separării semnalelor utile de zgomote (numită problema filtrării).
2) Şirul $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ se mai numeşte **spectrul** semnalului f. Spectrul este bine determinat de f şi invers, f este recuperat a.p.t. prin cunoaşterea coeficienţilor c_n. Este astfel evidenţiat un fenomen matematic remarcabil: entităţi continue sunt exprimate prin entităţi discrete, fenomen numit "dualitatea analogic – digital".

EXEMPLU. Fie funcţia $f: (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şi $\tilde{f}$ funcţia obţinută a.p.t. prelungind f prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$. Aceasta va fi o funcţie impară şi satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet. Coeficienţii Fourier vor fi

$$a_n = 0,\ n \ge 0 \text{ şi } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ n \ge 1.$$

Rezultă că $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\tilde{f}(x+0) + \tilde{f}(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

şi pentru $x \in (-\pi,\pi)$, se obţine

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

În particular, pentru $x = \frac{\pi}{2}$ va rezulta că $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$.

3. 10 exerciţii

1. Fie $H = \mathbb{R}^n$, cu produsul scalar euclidian şi $L : H \to \mathbb{R}$ o aplicaţie liniară continuă. Să se arate că există şi este unic $c \in H$ astfel încît $L(x) = <c,x>$, $\forall\, x \in H$.

2. Fie $H = M_{m,n}(\mathbb{R})$ mulţimea matricilor $m \times n$ cu coeficienţi reali. Pentru orice $A,B \in H$, se notează $<A,B>$ = urma matricii pătrate $A^T \cdot B$. Să se arate că se obţine un produs scalar pe H (urma unei matrici pătratice este suma elementelor de pe diagonala principală).

3. Într-un spaţiu prehilbertian real H, se spune că un şir (x_n) converge **slab** către $a \in H$ dacă $\forall\, y \in H$, $<x_n,y> \to <a,y>$. Să se arate că dacă $x_n \to a$ în H, atunci (x_n) converge slab către a. Reciproca are loc în $\mathbb{R}^n$, dar nu în general.

4. a) Să se arate că în orice spaţiu euclidian există o bază ortonormală.
b) Indicaţi o bază ortonormală în spaţiul l^2.

5. Să se arate că aplicaţia $f : l^2 \to l^2$, $\{x_0,x_1,x_2,...\} \mapsto \{x_1,x_2,...\}$ este $\mathbb{R}$ – liniară, continuă, surjectivă dar nu injectivă.

6. a) Să se arate că spaţiul Banach $\mathcal{M}_{[0,\pi/2]}$ cu norma "sup" nu poate avea o structură de spaţiu Hilbert.
b) Să se arate că spaţiul prehilbertian $C^1_{[0,2\pi]}$ cu produsul scalar $<f,g> = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ nu este un spaţiu Hilbert.

7. Să se determine coeficienţii Fourier a_n, b_n, c_n pentru funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\pi] \\ -1, & x \in (-\pi,0) \end{cases},$$

prelungită prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$.

8. Să se aplice teorema lui Dirichlet pentru funcţiile următoare extinse prin periodicitate la $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi,\pi]$;
b) $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi,\pi]$;
c) $f(x) = x + 1$, $x \in (-\pi,\pi]$.

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă 2π, satisfăcînd condiţiile teoremei Dirichlet.

a) Dacă f este pară, să se arate că $b_n = 0$, $n \ge 1$ şi $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $n \ge 0$.

b) Dacă f este impară, să se arate că $a_n = 0$, $n \ge 0$ şi $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, $n \ge 1$.

10. Dacă f satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, să se arate că $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ şi $c_{-n}(f)$ tind către 0 pentru $n \to \infty$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

1. Fie $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$. Pentru orice $x \in H$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = (a_1,...,a_n)$ cu $a_i \in \mathbb{R}$ şi $L(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i L(e_i)$. Notăm $L(e_i) = c_i$, $1 \le i \le n$, deci $L(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i = <c,x>$, unde $c = (c_1,...,c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$. Unicitatea lui c se demonstrează astfel: fie $d \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $<c,x> = <d,x>$ deci $<c - d,x> = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Luînd $x = c - d$, rezultă $\|c - d\| = 0$ deci $c = d$. Se poate aplica şi teorema XIV.3.

2. Dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$; $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, atunci $<A,B> = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Se verifică uşor proprietăţile produsului scalar.

3. $<x_n,y> - <a,y> = <x_n - a,y>$ şi conform inegalităţii lui Schwarz, $0 \le |<x_n - a,y>| \le \|x_n - a\|\cdot\|y\|$. Conform lemei cleştelui, rezultă $<x_n,y> \to <a,y>$. Dacă $x_n \to a$ slab, atunci $<x_n,e_k> \to <a,e_k>$, pentru $1 \le k \le n$ deci coordonatele lui x_n tind către coordonatele lui a şi ca atare, $x_n \to a$ în norma lui $\mathbb{R}^n$. Fie $H = L^2_{[0,\frac{\pi}{2}]}$. Pentru orice $f \in H$, avem $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx$ deci $<f,\sin nx> \to 0$ pentru $n \to \infty$. Aşadar $\{\sin nx\} \to 0$ slab în H. Dar $\|\sin nx\| = \frac{\pi}{4}$ nu tinde către zero.

4. a) Se consideră un sistem liniar independent care se ortogonalizează prin procedeul Gram – Schmidt. Apoi se normează vectorii (a norma un vector $v \ne 0$ înseamnă a considera vectorul $\frac{v}{\|v\|}$).
b) Fie $e_1 = (1,0,0,...)$; $e_2 = (0,1,0,...)$; $e_3 = (0,0,1,0,...)$. Aceşti vectori din l^2 sunt liniar independenţi şi ortogonali doi cîte doi; apoi $\|e_k\| = 1$, $\forall\, k \ge 1$. Orice $x \in l^2$, $x = (x_n)_{n\ge1}$ se scrie $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ şi ca atare, x este limita unui şir de combinaţii liniare de vectori e_k.

5. Pentru orice $x = (x_n)_{n\ge0}$ din l^2 avem $\|f(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 = \|x\|^2$ deci $\|f(x)\| \le \|x\|$. Rezultă că f este continuă. Restul este imediat. Aplicaţia f se mai numeşte "funcţie de şiftare".

6. a) Luăm $f = \sin$, $g = \cos$. Atunci $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$, $\|f + g\| = \sqrt{2}$ $\|f - g\| = 1$ şi nu se verifică regula paralelogramului.
b) Trebuie produs un şir Cauchy în H care nu este convergent. Să considerăm $\forall\, n \ge 1$, funcţia continuă $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ şi $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ date prin

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ 1 & \text{dacă } x \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \\ -n\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) & \text{dacă } x \in \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Pentru orice $m,n \geq 1$ avem

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_0^{2\pi} (f_m(x) - f_n(x))^2 dx \leq \frac{2}{n} \text{ şi } \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} (f_n(x) - g(x))^2 dx = 0 .$$

Aşadar, şirul (f_n) este Cauchy în H, dar nu converge către o funcţie continuă.

7. Avem $a_n = 0$, $n \geq 0$ şi $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin nx\, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$. Apoi $c_0 = 0$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ şi $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ pentru $n \geq 1$. Se observă că a_n, b_n, c_n converg către zero.

8. a) $b_n = 0$, $n \geq 1$; $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$.

b) $a_0 = \frac{2\pi^3}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$, $b_n = 0$, $\forall\, n \geq 1$ etc.

9. Dacă f pară, atunci $f(x) \cdot \cos nx$ este pară, iar $f(x) \cdot \sin nx$ este impară. Dacă f este impară, atunci $f(x) \cdot \cos nx$ este impară şi $f(x) \cdot \sin nx$ pară. Reamintim apoi că dacă $g : [-a,a] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi impară, atunci $\int_{-a}^{a} g(x) dx = 0$ iar dacă este pară, atunci $\int_{-a}^{a} g(x) dx = 2\int_0^a g(x) dx$.

10. Dacă f satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci $f \in L^1_{[-\pi,\pi]}$ şi aplicăm lema lui Riemann. Rezultă

$$\lim_{n \to \infty} a_n(f) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0$$

şi similar:

$$\lim_{n \to \infty} b_n(f) = 0 .$$

Apoi $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ deci $c_n \to 0$ şi $c_{-n} \to 0$.

SUBIECTE DATE LA PROBA SCRISĂ A EXAMENULUI DE "ANALIZĂ MATEMATICĂ"

Prezentăm două subiecte complete date la examenul din anul I – facultăţi electrice, sesiunile din iarnă şi vară, la Universitatea POLITEHNICA din Bucureşti. Timpul de lucru : 2 ore.

A. Sesiunea – iarnă

1. Criteriile lui Abel şi Lebniz; enunţ şi demonstraţie.

2. Să se răspundă la următoarele două întrebări:
a) care este deosebirea între PC şi UC pentru şirurile de funcţii ?
b) se ştie că $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$; ce se obţine pentru $x = 5$?

3. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este continuă şi $a \in \mathbb{R}$, să se arate că mulţimea $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid f(x,y) < a\}$ este deschisă. Daţi exemplu de f şi a pentru care M este conexă, dar nu convexă.

4. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y,z) = 2x + y + z$, cu legăturile $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + z^2 = 3$, $y > 0$. Interpretare geometrică.

B. Sesiunea – vară

1. Funcţiile Gamma şi Beta; definiţie, proprietăţi.

2. a) Justificaţi importanţa formulei Gauss – Ostrogradski.
b) Daţi exemplu de o proprietate care are loc a.p.t. dar nu peste tot.

3. Să se arate că $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy \le \frac{\pi}{2}$.

4. Dacă $x \in (0,2\pi)$ să se arate că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$.

INDICAȚII

A. 2. a) UC $\Rightarrow$ PC; invers nu.

b) Eroarea absolută în formulă este $\le \frac{x^6}{6!} = \frac{5^6}{6!} < 22$, ceea ce arată că este o formulă grosieră. Ea devine utilă doar în vecinătatea lui $x = 0$ deci pentru $|x|$ suficient de mic (de exemplu pentru $|x| \le 1$, eroarea este $\le \frac{1}{6!}$).

3. $M = f^{-1}((-\infty,a))$ și $(-\infty,a)$ este deschisă. De exemplu, $f(x,y) = -x^2 - y^2$ și $a = 0$. Atunci $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. Se poate aplica metoda multiplicatorilor Lagrange; se poate de asemenea pune $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = 1$, $z = \sqrt{3}\sin t$ etc.

B. 2. a) Legătură între integrale de suprafață și volum, ca și între date la frontieră, accesibile și date eventual inaccesibile.
b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît $f(x) = 0$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ și $f(x) = 1$ pentru $x \in \mathbb{N}$; avem $f = 0$ a.p.t. dar nu pe tot $\mathbb{R}$.

3. Se trece la coordonate polare.

4. Se dezvoltă în serie Fourier $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in (0,2\pi)$, prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Chițescu, R. Cristescu, Gh. Grigore, Gh. Gussi, A. Halanay, M. Jurchescu, S. Marcus
   – *Dicționar de analiză matematică*, Ed. Șt. și Encicl., București, 1989.

2. J. Dieudonné
   – *Foundations of modern analysis I*, Academic Press, New York, 1960.

3. P. Flondor, O. Stănășilă
   – *Varietăți diferențiabile și sisteme dinamice*, Lit. IPB, București, 1988.

4. M. Jurchescu
   – *Introducere în analiza pe varietăți*, Lit. Univ. București, 1980.

5. W. Rudin
   – *Principles of mathematical analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1964.

6. M. Spivak
   – *Calculus on manifolds*, Benjamin, New York, 1965.

7. O. Stănășilă
   – *Analiză matematică*, Ed. Did. și Ped., București, 1981.

8. V. A. Zorici
   – *Matematiceski analiz*, Nauka, Moscova, vol. I 1981; vol. II 1984.

CULEGERI DE PROBLEME RECOMANDATE

1. D. P. Demidovici
   – *Sbornik zadaci*, GIFML, Moscova, 1962.

2. N. Donciu, D. Flondor
   – *Algebră și analiză matematică*, Ed. ALL, București, 1993.

4. C. Popa, V. Hiriș, M. Megan
   – *Introducere în analiza matematică prin exerciții și probleme*, Ed. Facla, Timișoara, 1976.

INDEX ALFABETIC

Tipărit la
Atelierele Tipografice
METROPOL